



# Méthode probabiliste unifiée pour la prédiction du risque de rupture en fatigue

Emmanuelle Thieulot-Laure

## ► To cite this version:

Emmanuelle Thieulot-Laure. Méthode probabiliste unifiée pour la prédiction du risque de rupture en fatigue. Sciences de l'ingénieur [physics]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2008. Français. NNT : 2008DENS0011 . tel-01199575

**HAL Id: tel-01199575**

**<https://theses.hal.science/tel-01199575>**

Submitted on 15 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° ENSC-2008/102

**THESE DE DOCTORAT  
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Madame Emmanuelle THIEULOT-LAURE

**pour obtenir le grade de**

**DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**MECANIQUE- GENIE MECANIQUE – GENIE CIVIL**

**Sujet de la thèse :**

**Méthode probabiliste unifiée pour la prédiction du risque de rupture en fatigue.**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 25 avril 2008 devant le jury composé de :

Ky DANG VAN	Professeur des universités-Paris XI	Président
Suzanne DEGALLAIX	Professeure des universités-Lille	Rapporteuse
Yves NADOT	Maitre de conférence HDR-Bordeaux	Rapporteur
Sylvain CALLOCH	Professeur des universités-Brest	Examineur
Siegfried FOUVRY	Professeur des universités-Lyon	Examineur
Stéphane FRECHINET	Ingénieur SNECMA	Examineur
Sylvie POMMIER	Professeure-ENS Cachan	Directrice de thèse

LMT-Cachan (UMR 8535)  
(ENS Cachan/CNRS/Universite Paris 6/UniverSud Paris)  
1, avenue du Président Wilson, 94230 CACHAN CEDEX (France)



## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan dans le cadre d'une thèse CIFRE en partenariat avec la SNECMA.

Je souhaite adresser mes plus sincères remerciements à Sylvie Pommier, qui m'a encadrée durant ces trois ans. Sa bonne humeur, sa disponibilité, ses précieux conseils m'ont permis de mener à bien cette thèse, et dans les meilleures conditions.

J'adresse toute ma reconnaissance aux membres du jury : Monsieur Ky Dang Van pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse, Madame Suzanne Degallaix et Monsieur Yves Nadot pour avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire et Messieurs Sylvain Calloch, Siegfried Fouvry et Stéphane Fréchet pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Un grand merci à mes anciens collègues de SNECMA : Stéphane, Fabien, Didier, Sylvain, Antoine, Arnaud, Nicolas, Bertrand. Je vais longtemps regretter les petits déjeuners du vendredi matin avec vous !

Je garderai de ces trois années au LMT un souvenir très agréable, de par la bonne ambiance qui y règne. Je souhaite témoigner ma gratitude à l'ensemble des membres du LMT, et tout particulièrement à mes collègues de mezzanine : Eléonore et Marion (l'« équipe jupe »), Rami, Juan, Guillaume, Joumana, Nicolas, Abdulfatah, Gilles, Sébastien et tous les autres, sans oublier les poissons, James et Bond, que Joumana et moi laissons sous bonne garde (espérons le... !). Et je m'en voudrais d'oublier Grégory et Thomas que je remercie pour le formidable plan de carrière qu'ils ont tracé pour moi, à charge de revanche... !

Je remercie tous mes amis qui m'ont apporté leur soutien et leur affection toutes ces années. Aude, merci pour ton amitié sans failles. Yolande nos footings et ta joie de vivre si communicative ont allégé la fin de thèse. Babou, Marjo, Eric, Lionel, et tous vos bouts de chous, c'est un grand bonheur d'avoir une place dans votre grande famille ! Lore, Jérôme merci pour les soirées jeux-bonbons-super marmotte, ça fait toujours du bien un petit retour en enfance ! Alain, Thi Liên, Yann, merci pour le soutien quasi quotidien par mail, et une petite dédicace particulière aux parties de démineur avec Alain !

Je n'oublie pas Danièle et François, Muriel et Jean-Mi, Danièle et Patrick, toujours présents, que ce soit pour un mariage ou pour une thèse ! Merci, votre présence m'a fait chaud au cœur !

Tous mes remerciements, ma reconnaissance et mon affection à ma famille. Papa, maman, Cedric, merci pour votre soutien et votre amour inconditionnel. Merci aussi à Jany, spécialiste incontestée des crêpes à l'huile d'olive ! Et mes souvenirs les plus affectueux pour André, qui restera dans mon cœur, et qui m'a fait découvrir avec Jany les plaisirs du vol à voile, de l'avion de tourisme, de l'hélico, mais aussi et surtout les ballades en Provence (oh... c'est beau... !). Merci aussi à Annick, Michel et Marie pour toutes les attentions que vous m'avez toujours témoignées. Enfin, merci à mon mari, pour sa patience, sa présence, son amour, son soutien et sa confiance en moi qui m'ont donné la force d'aller au bout.



## TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>11</b>
<b>1. CADRE POUR UNE APPROCHE PROBABILISTE UNIFIEE POUR LA FATIGUE.....</b>	<b>15</b>
1.1. SOURCES D’ALEA DANS LES MECANISMES PHYSIQUES D’INITIATION .....	15
1.1.1. Amorçage sur défauts.....	16
1.1.2. Amorçage par micro-plasticité.....	19
1.1.3. Synthèse sur les sources d’aléa .....	23
1.2. MODELES PROBABILISTES DANS LA BIBLIOGRAPHIE .....	23
1.2.1. Modèles probabilistes de type « approche directe ».....	24
1.2.2. Modèles probabilistes de type « approche indirecte ».....	32
1.2.3. Synthèse sur les modèles probabilistes .....	42
1.3. MODELES DE PREVISION DE DUREES DE VIE UTILISES A SNECMA.....	43
1.3.1. Modèle de prévision de durée de vie déterministe .....	43
1.3.2. Modèles de prévision de durée de vie probabilistes .....	43
1.3.3. Bases d’un modèle probabiliste unifié .....	47
1.3.4. Synthèse sur les modèles probabilistes SNECMA.....	50
<b>2. CRITERE MULTIAXIAL DE FATIGUE PRENANT EN COMPTE LA TAILLE, LA FORME ET LA POSITION DES DEFAUTS.....</b>	<b>51</b>
2.1. BIBLIOGRAPHIE .....	52
2.1.1. Critères de fatigue.....	52
2.1.2. Effet de taille de fissure.....	59
2.1.3. Contrainte $T$ .....	62
2.2. DEFINITION DU CRITERE .....	64
2.3. IDENTIFICATION .....	71
2.3.1. Principe .....	71
2.3.2. Matériau.....	77
2.3.3. Identification en biaxial .....	77
2.3.4. Synthèse sur l’identification du critère .....	82
2.4. APPLICATIONS.....	83
2.4.1. Effet de taille .....	83
2.4.2. Influence de la position du défaut .....	86
2.4.3. Synthèse sur l’implantation du critère de non-propagation .....	88
2.5. PROBABILISATION DU CRITERE : PRISE EN COMPTE D’UNE DISTRIBUTION DE TAILLES DE DEFAUTS.....	89
2.5.1. Choix de la distribution de défauts .....	89
2.5.2. Expression de la probabilité de rupture.....	90
2.5.3. Vérification de l’implantation du modèle probabiliste .....	93
2.5.4. Synthèse de la probabilisation du critère.....	103
<b>3. ENRICHISSEMENT DU MODELE PROBABILISTE : PRISE EN COMPTE DE L’HETEROGENEITE DES PROPRIETES MECANIKES LOCALES.....</b>	<b>105</b>
3.1. BIBLIOGRAPHIE .....	106
3.1.1. Modèles polycristallins .....	106
3.1.2. Fluctuation des champs mécaniques dans le polycristal .....	108

3.1.3.	<i>Synthèse sur les agrégats polycristallins, leurs modélisations et leurs propriétés .....</i>	<i>111</i>
3.2.	MISE EN ŒUVRE DES CALCULS ELEMENTS FINIS D'AGREGATS POLYCRISTALLINS 2D ET 3D	111
3.2.1.	<i>Représentation de la microstructure .....</i>	<i>111</i>
3.2.2.	<i>Loi de comportement locale .....</i>	<i>114</i>
3.2.3.	<i>Calculs par éléments finis .....</i>	<i>115</i>
3.2.4.	<i>Synthèse sur les différents modèles éléments finis utilisés pour les cas tests</i>	<i>117</i>
3.3.	RESULTATS : CARACTERISATION DE LA FLUCTUATION DES CONTRAINTES LOCALES D'ORIGINE MICROSTRUCTURALE .....	118
3.3.1.	<i>Mise en évidence de l'organisation spatiale de la fluctuation.....</i>	<i>118</i>
3.3.2.	<i>Caractérisation de l'échelle spatiale de la fluctuation .....</i>	<i>121</i>
3.3.3.	<i>Synthèse sur l'organisation spatiale de la fluctuation des contraintes locales</i>	<i>125</i>
3.4.	CARACTERISATION DE L'INTENSITE DE LA FLUCTUATION.....	125
3.4.1.	<i>Procédure de caractérisation.....</i>	<i>125</i>
3.4.2.	<i>Influence des paramètres de calcul.....</i>	<i>128</i>
3.4.3.	<i>Effet du chargement sur la fluctuation des contraintes dans le modèle éléments finis du polycristal.....</i>	<i>133</i>
3.4.4.	<i>Synthèse sur l'intensité de la fluctuation des contraintes locales.....</i>	<i>139</i>
3.5.	IMPLANTATION DANS LE CRITERE.....	140
3.5.1.	<i>Dispersion sur le facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure.....</i>	<i>140</i>
3.5.2.	<i>Dispersion sur la surface seuil du critère de non-propagation .....</i>	<i>144</i>
3.5.3.	<i>Synthèse sur les effets probabilistes à l'échelle microstructurale. ....</i>	<i>147</i>
<b>CONCLUSION.....</b>		<b>149</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>		<b>151</b>

## TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 0-1 : Courbe de Wöhler. ....	11
Figure 0-2 : Diagramme de Kitagawa. ....	13
Figure 1-1 : Amorçage d'une fissure de fatigue sur une inclusion de céramique subsurfacique. Alliage à base de nickel (N18) élaboré par métallurgie des poudres et ensemencé artificiellement par des inclusions de céramiques, afin de s'assurer de la présence d'une inclusion dans l'éprouvette de fatigue [Pommier,1995]. ....	16
Figure 1-2 : Microstructure du superalliage base Nickel 718RD contenant des nitrures (TiN) et des carbures de niobium (NbC) [Alexandre,2004]. ....	17
Figure 1-3 : (a) Inclusion subsurfacique dans un acier martensitique Cr-Mo, (b) « Optically Dark Area (ODA) » entourant l'inclusion [Murakami,2006]. ....	17
Figure 1-4 : Accident de Pensacola, Floride en 1996 (a) Rupture du disque Fan d'un moteur McDonnell Douglas MD88 à partir d'un défaut d'usinage d'un perçage (b) Impact du disque sur la cabine. ....	18
Figure 1-5 : Concentration de contrainte au voisinage d'une cavité sphérique. Solution élastique et exemple de solution élasto-plastique normalisées par la contrainte appliquée à l'infini. Amplitude de la déformation plastique cyclique au voisinage de l'inclusion pour le cycle stabilisé. Tracé en fonction de la distance à la cavité normalisée par la rayon de la cavité.....	19
Figure 1-6 : (a) Amorçage d'une fissure de fatigue parallèlement aux lignes de glissement d'un grain, alliage de Titane [Le Biavant,2000] (b) Stades de propagation de fissure de fatigue.....	20
Figure 1-7 : Illustration du mécanisme de formation d'intrusions-extrusions à l'origine d'une fissure de fatigue [Pommier, 2001]. ....	20
Figure 1-8 : Diagramme de Kitagawa [Miller,1987]. ....	21
Figure 1-9 : Amorçage de nombreuses micro-fissures de fatigue à la surface d'un TA6V sollicité dans son domaine d'élasticité macroscopique [Le Biavant,2000]. ....	21
Figure 1-10 : Dépendance de la limite de fatigue $\sigma_f$ au paramètre $\sqrt{aire}$ pour des éprouvettes contenant des défauts initiaux [McEvily,2003]......	26
Figure 1-11 : Evolution de la densité de probabilité en fonction du nombre de cycles N. ....	29
Figure 1-12 : Plaque en flexion+traction d'épaisseur 10 mm. A gauche, deux gradients de contrainte correspondant à deux zones d'une structure. En ce qui concerne l'amorçage, un défaut dans la zone sollicité selon le gradient en pointillés forts est plus critique. Ce n'est plus le cas dès que le défaut s'est propagé de 2,5 mm. ....	31
Figure 1-13 : Illustration de l'approche contrainte résistance.....	33
Figure 1-14 : Etude de l'influence des paramètres de la statistique de Weibull .....	36
Figure 1-15 : Influence du volume de matière sollicité sur la probabilité de rupture calculée par la statistique de Weibull, dans le cas d'un champ de contrainte homogène. ....	37
Figure 1-16 : Volume élémentaire représentatif du modèle à deux échelles. ....	39
Figure 1-17 : Comportement du modèle à deux échelles.....	40
Figure 1-18 : Courbes permettant l'identification du modèle probabiliste à deux échelles.....	41
Figure 1-19 : Disque fan de l'accident de Sioux City en 1989 .....	44
Figure 1-20 : Organigramme général d'un outil probabiliste unifié. ....	49
Figure 2-1 : Diagramme de Haigh.....	54
Figure 2-2 : Représentation du seuil du critère de Dang Van dans le plan $(\sigma_H, \tau)$ pour l'acier 30NCD16. ....	57
Figure 2-3 : Mise en évidence de l'effet de taille de défaut sur la limite de fatigue [Kitagawa, 1976].....	59



Figure 2-4 : Comparaison des limites de fatigues expérimentales et prédites par le modèle en fonction de la taille de défaut pour l'acier S35C [McEvily et al., 2005].	60
Figure 2-5 : Evolution de la limite de fatigue en fonction du facteur de concentration des contraintes calculé pour différentes géométries de défauts, pour deux tailles différentes [Billaudeau et al.,2004].	61
Figure 2-6 : Vitesses de propagation et modes de rupture dans un diagramme de Kitagawa [Brown,1986]	62
Figure 2-7 : Fissure traversante soumise à un chargement biaxial ( $S_x, S_y$ ).	63
Figure 2-8 : Mise en évidence de l'effet de taille introduit par la contrainte T pour un chargement uniaxial quelconque, $ T/K_t  = 1/\sqrt{\pi a}$ .	64
Figure 2-9 : Domaine d'intégration de la densité d'énergie élastique de cisaillement.	67
Figure 2-10 : Comparaison du critère de non-propagation en mode I avec la frontière du domaine élastique de la structure fissurée calculée par éléments finis selon un critère $\Delta\rho = 0,2 \mu\text{m}$ . Matériau : $E=200 \text{ GPa}$ , $\nu=0,3$ , $R_e=100 \text{ MPa}$ , écrouissage cinématique linéaire $H=100 \text{ MPa}$ [Hamam et al.,2005].	69
Figure 2-11 : Comparaison du critère de non-propagation en mode mixte avec la frontière du domaine élastique de la structure fissurée calculée par éléments finis [Pommier,2007].	69
Figure 2-12 : Evolution du domaine élastique de la structure fissurée lors d'un trajet de chargement non-proportionnel : surface après le chargement (1) en blanc et après le chargement (2) en noir [Hamam et al.,2005].	70
Figure 2-13 : Modélisation des défauts par des fissures de géométries particulières	72
Figure 2-14 : Zone de validité des champs de la mécanique linéaire de la rupture.	74
Figure 2-15 : Valeurs des contraintes normales, tangentielles et parallèles au front de fissure pour un chargement biaxial ( $\sigma_1, \sigma_2$ )	76
Figure 2-16 : Illustration graphique de l'identification du paramètre $\delta$ à partir de la limite de fatigue en torsion et en traction	79
Figure 2-17 : Comparaison du critère de non-propagation identifié pour l'acier 30NCD16 avec les critères de Dang Van et Von Mises.	81
Figure 2-18 : Surface seuil du critère identifié pour l'acier 30NCD16.	82
Figure 2-19 : Critère de non-propagation tracé dans le diagramme de Kitagawa et comparaison avec la mécanique linéaire de la rupture.	84
Figure 2-20 : Agrandissement du critère dans son domaine de validité. Comparaison avec la mécanique linéaire de la rupture.	85
Figure 2-21 : Influence de $\delta$ sur l'effet de taille dans le diagramme de Kitagawa-Takahashi.	85
Figure 2-22 : Influence de la taille de défaut pour un chargement biaxial.	86
Figure 2-23 : Comparaison des frontières pour un défaut interne et un défaut surfacique de tailles équivalentes.	87
Figure 2-24 : Processus de calcul de la probabilité de rupture.	93
Figure 2-25 : Géométrie de la plaque trouée sollicitée en traction	94
Figure 2-26 : Définition des angles d'Euler pour passer du repère ( $Oxyz$ ) au repère ( $Ox'y'z'$ )	95
Figure 2-27 : Maillage de la plaque trouée	96
Figure 2-28 : Influence de la discrétisation des angles d'Euler sur la probabilité de rupture calculée.	97
Figure 2-29 : Maillages en bord de trou de rayon $a=5\text{mm}$ .	98
Figure 2-30 : Evolution de l'écart relatif entre la solution calculée et la solution de référence en fonction du maillage	99
Figure 2-31 : Gradient de la composante maximale de la contrainte principale.	100
Figure 2-32 : Evolution de la probabilité de rupture en fonction du facteur de concentration de contrainte en bord de trou.	101

Figure 2-33 : Densité de probabilité de contrainte à rupture pour un chargement de traction uniaxiale, matériau 30NCD16.....	102
Figure 3-1 : Schéma de principe. Le calcul de structure ne donne accès qu'à l'estimation de la contrainte moyenne dans un élément de volume. Or à l'échelle locale, la microstructure induit des fluctuations de contraintes que l'on cherchera à caractériser en intensité et spatialement afin d'en tenir compte ensuite pour post-traiter des calculs de structure macroscopiques. (b) Selon la dimension relative du défaut et de la microstructure, cette fluctuation pourra induire ou non une fluctuation du seuil d'endommagement de fatigue. ....	106
Figure 3-2 : Maillage d'un agrégat polycristallin de 10 grains par affectation de d'orientations locales.....	107
Figure 3-3 : (a) Agrégat polycristallin de 14 grains (b) Maillage global de la structure avec l'agrégat situé en son centre [Sauzay,2006]......	109
Figure 3-4 : Représentation schématique du réseau de distribution des forces dans un milieu granulaire bidimensionnel. (a) expérience à l'aide de cylindres biréfringents [Van Hecke,2005], (b) simulation numérique d'un essai de cisaillement sur un milieu constitué de cylindres indéformables en contacts. [Radjai,1999]. Plus grande est l'intensité de la force plus épaisse est la ligne reliant deux centres de grains. ....	110
Figure 3-5 : (a) Microstructure constituée de grains hexagonaux d'orientations aléatoires (b) Maillage d'un grain de la structure (c) Intensité de la contrainte principale maximale pour un essai de traction pour un polycristal de cuivre [Pommier,2002] .....	110
Figure 3-6 : Schéma de construction d'une microstructure 2D suivant la décomposition de Voronoï.....	112
Figure 3-7 : Microstructures étudiées.....	113
Figure 3-8 : Angles d'Euler ( $\phi_1, \Phi, \phi_2$ ) définissant l'orientation cristalline.....	115
Figure 3-9 : Zoom de quatre maillages différents d'une même microstructure bidimensionnelle .....	116
Figure 3-10 : Etude de sensibilité de la contrainte principale maximale moyenne par grain au nombre de subdivisions utilisées pour mailler ces grains. Cas test 2D / 103 grains.....	117
Figure 3-11 : Intensité de la composante maximale des contraintes principales pour les différentes microstructures étudiées, dans le cas d'un chargement de traction .....	119
Figure 3-12 : Intensité de la composante maximale des contraintes principales pour les différentes microstructures étudiées, dans le cas d'un chargement de cisaillement .....	120
Figure 3-13 : Caractérisation « visuelle » de la périodicité des bandes dans lesquelles l'intensité de la contrainte principale maximale est plus grande que la moyenne dans la microstructure.....	121
Figure 3-14 : Corrélation spatiale de deux signaux réels et continus.....	122
Figure 3-15 : Fonction d'autocorrélation de la ligne de pixels médiane de la carte d'intensité des contraintes principales maximales calculée en traction simple uniaxiale. Noter une première période de l'ordre de 2 grains .....	123
Figure 3-16 : Moyenne des fonctions d'autocorrélation des lignes de pixels de la carte d'intensité des contraintes principales maximales calculée en traction simple uniaxiale, sur une hauteur de un grain . Noter la période de l'ordre de 5 grains .....	123
Figure 3-17 : Somme des fonctions d'autocorrélation de 50 lignes de pixels de l'image, soit 5 grains .....	124
Figure 3-18 : Procédure de caractérisation de la dispersion des contraintes principales dans le grain central du modèle de microstructure, d'orientation fixée, pour une texture isotrope. ....	126

Figure 3-19 : Fonction de répartition de la contrainte principale maximale dans le grain central pour une microstructure 2D de 4578 grains et pour 300 tirages des orientations cristalline de ses voisins: comparaison à la loi normale centrée réduite .....	127
Figure 3-20 : Fonction de répartition de la contrainte principale maximale dans le grain central pour une microstructure 2D de 4578 grains : comparaison à la loi normale centrée réduite, (a) pour 20 tirages aléatoires, (b) pour 100 tirages aléatoires .....	129
Figure 3-21 : Evolution de l'erreur par rapport à la loi normale en fonction du nombre de calculs.....	129
Figure 3-22 : Influence de l'orientation du grain central sur les paramètres de la distribution de contraintes dans ce grain. (a) moyenne et écart type. (b) écart type relatif.....	132
Figure 3-23 : Trajets de chargement étudiés .....	135
Figure 3-24 : Evolution de l'écart type relatif de la distribution de la composante maximale des contraintes principales en fonction du taux de triaxialité du chargement, pour les constantes d'élasticité du Nickel .....	136
Figure 3-25 : Evolution des écart type relatif des distributions des composantes maximale et minimale des contraintes principales en fonction du taux de triaxialité du chargement, pour les constantes d'élasticité du Nickel, calculs bidimensionnels.....	137
Figure 3-26 : Fissure traversante soumise à une charge ponctuelle $P$ .....	141
Figure 3-27 : Evolution de la fluctuation sur $K_I$ en fonction de la taille de fissure. ....	143
Figure 3-28 : Extraction du chargement vu par la fissure traversante. ....	143
Figure 3-29 : Evolution de la fluctuation sur $K_I$ en fonction de la taille de fissure, pour un chargement calculé sur une microstructure modélisée par éléments finis. ....	144
Figure 3-30 : Seuil de non-propagation isoprobable tracé en fonction de la taille de fissure, pour diverses probabilités. L'écart type choisi est celui identifié pour le Nickel : 7,8% en uniaxial en 3D pour un grain en volume. ....	146
Figure 3-31 : Ecart à la moyenne sur le seuil de non-propagation isoprobable tracé en fonction de la taille de fissure, pour diverses probabilités. L'écart type choisi est celui identifié pour le Nickel : 7,8% en uniaxial en 3D pour un grain en volume.....	146

## INTRODUCTION

Un moteur d'avion est sollicité de façon cyclique. Pour un moteur civil, le cycle se décompose en trois phases : une mise en charge lors du décollage, un temps de maintien lors du vol de l'avion et enfin une décharge lors de l'atterrissage. Pour les moteurs militaires, les missions sont beaucoup plus complexes. Dans tous les cas, les sollicitations cycliques auxquelles sont soumises les pièces d'un turboréacteur peuvent conduire à leur rupture par fatigue.

Le phénomène de rupture par fatigue s'initie au niveau de la microstructure. Sous l'action des sollicitations cycliques, des microfissures se forment (au niveau des joints de grains, des défauts du matériau, ...), donnant naissance au bout d'un certain nombre de cycles à une fissure principale qui peut se propager et conduire à la rupture. Les pièces massives des turboréacteurs, telles que les disques de turbines, sont des pièces dont la rupture n'est pas tolérée car cela mettrait en jeu l'intégrité de l'avion. Une attention particulière est donc portée à leur dimensionnement, et des méthodes et outils de prévision de niveau de risque de rupture et durée de vie sont développés.

L'essai de fatigue le plus courant consiste à soumettre une éprouvette à des cycles d'efforts périodiques d'amplitude maximale  $\sigma_{\max}$  et on relève le nombre de cycles  $N$  conduisant à la rupture de l'éprouvette. Si l'on reporte ces résultats dans un plan  $(\sigma, N)$ , on obtient une courbe, appelée **courbe de Wöhler**, dont l'allure est la suivante :

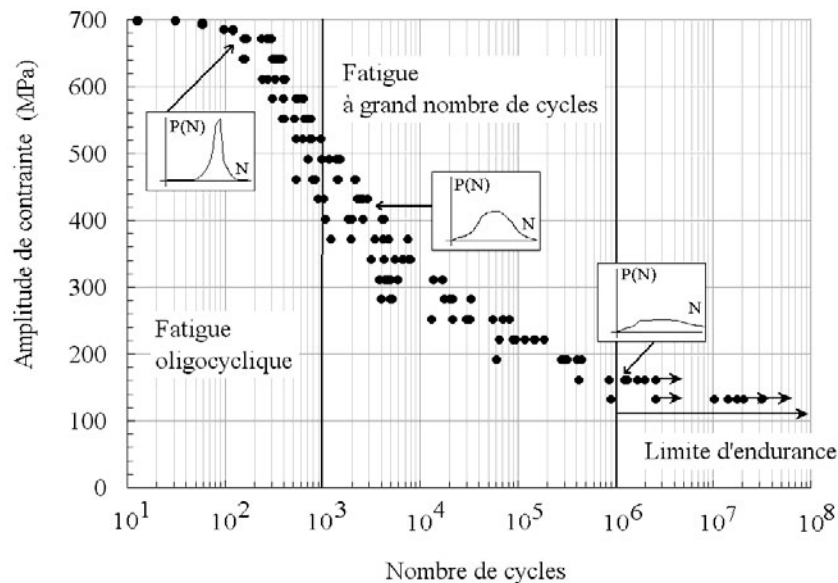


Figure 0-1 : Courbe de Wöhler.

Lors des essais de fatigue, on constate une dispersion des durées de vie obtenues pour un niveau de contrainte donné. Un traitement statistique de ces résultats permet de déterminer des **faisceaux de courbes iso-probables**, c'est-à-dire des courbes reliant l'amplitude de contrainte au nombre de cycles pour une probabilité donnée. Une approche déterministe consiste à assimiler la durée de vie de la structure au nombre de cycles pour lequel, en fonction du chargement, on a une probabilité de rupture de  $10^{-3}$ .

Cependant on constate que plus le nombre de cycles est élevé, plus la dispersion est importante, comme on peut le voir sur la Figure 0-1. Aussi, pour un même nombre d'essais, la confiance dans la durée de vie ne sera pas la même en fonction du nombre de cycles. Pour les grands nombres de cycles, il faudrait effectuer plus d'essais afin de garder une confiance correcte dans les résultats.

**L'approche déterministe** proposée fournit une durée de vie minimale basée sur un traitement statistique des données expérimentales, mais ne permet en aucun cas de distinguer les divers mécanismes qui ont mené à la rupture par fatigue. Les durées de vie estimées pourront donc être **très conservatives** par rapport à l'expérience.

Un autre inconvénient de la méthode réside dans son **impossibilité à prendre en compte des effets d'échelle** entre une éprouvette et une pièce moteur. La durée de vie de la structure globale est déterminée à partir des courbes contraintes-durée de vie établies lors d'essais de fatigue sur éprouvette. Or la probabilité de rencontrer un défaut à l'origine d'une rupture par fatigue dans le matériau diminue avec le volume testé, la probabilité d'obtenir une durée de vie faible est donc plus grande dans la pièce que dans l'éprouvette.

Pour des matériaux présentant des défauts rares pour lesquels le volume d'une éprouvette n'est pas suffisant pour être représentatif de leur distribution, les **méthodes de type probabiliste** sont donc un complément nécessaire à la prédiction de durée de vie en fatigue.

Différents modèles de prévision de durées de vie probabilistes ont été développés à SNECMA, s'appliquant chacun à un type de matériau et une population de défauts spécifiques. Un examen des méthodes révèle de fortes similitudes entre ces modèles. En effet, la représentation de la dispersion des durées de vie passe par la description des mécanismes généraux de rupture par fatigue et de leurs aléas. C'est pourquoi SNECMA souhaite unifier ses méthodes probabilistes et disposer d'un **outil unique**, basé sur les mécanismes physiques du processus de fatigue, et capable de traiter les différents matériaux nécessitant une approche probabiliste.

La principale difficulté identifiée réside dans la **capacité à traiter une gamme de tailles de défauts aussi large que possible**. En effet, les travaux de Kitagawa et Takahashi [Kitagawa et al.,1976] ont permis de mettre en évidence le rôle de la taille de fissure sur la limite d'endurance d'un matériau. Des essais de fatigues réalisés sur des éprouvettes contenant des défauts artificiels de tailles contrôlées ont permis de relier la limite de fatigue du matériau à la taille d'un défaut initial. On peut voir sur la Figure 0-2 que deux domaines se distinguent. D'une part le domaine des petits défauts, où l'on constate la relative indépendance de la limite de fatigue à la taille de défaut et où des modèles en contraintes permettent une bonne estimation de cette limite. Et d'autre part le domaine des grands défauts, où le défaut peut être assimilé à une fissure et où la mécanique linéaire élastique de la rupture permet de prévoir avec justesse la limite d'endurance du matériau. Pour chacun des domaines, une modélisation adéquate permet d'évaluer correctement la limite d'endurance du matériau. Mais dès lors qu'une population de défauts se situe dans le domaine de transition, ou encore lorsque deux populations de défauts appartenant chacune à un domaine entrent en compétition, aussi bien les modèles en contraintes que les modèles de mécanique linéaire élastique de la rupture atteignent leurs limites. La problématique d'un outil unifié est donc réellement intéressante d'un point de vue physique.

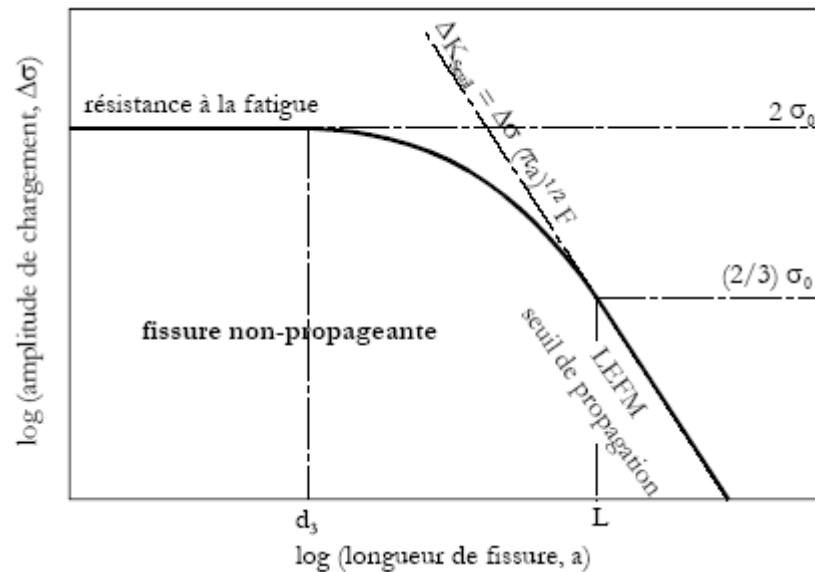


Figure 0-2 : Diagramme de Kitagawa.

Ce rapport s'articule autour de trois chapitres. Le **premier chapitre** est une bibliographie générale des modèles probabilistes de fatigue. Les mécanismes de fatigue sont identifiés, notamment l'importance des défauts sur la limite de fatigue des matériaux. Les différents modèles probabilistes ont été classés en deux grandes familles, dont les avantages et inconvénients respectifs seront discutés. Les modèles probabilistes actuellement employés à SNECMA sont eux aussi exposés. Finalement, les principes de base du modèle probabiliste unifié sont ébauchés, en essayant de tirer parti des avantages identifiés pour chaque famille.

Le **second chapitre** est consacré à la mise en œuvre d'un critère de non-propagation de fissures qui soit applicable sur toutes les tailles de défauts rencontrées. Basé sur des quantités issues de la mécanique linéaire élastique de la rupture, il prend aussi en compte des variables qui permettent de l'étendre d'une part aux petits défauts, et d'autre part de traiter les chargements multiaxiaux. Si l'on suppose que le matériau étudié comporte des défauts, ce critère permet d'évaluer la contrainte seuil de non-propagation de ces défauts. Par la suite, ce seuil est probabilisé en prenant en compte le caractère aléatoire de la présence de défauts.

La prise en compte de la distribution de tailles de défauts ne suffit pas toujours à représenter la dispersion observée expérimentalement sur les durées de vie. Pour pallier les écarts rencontrés, il est intéressant de s'intéresser aux hétérogénéités des propriétés mécaniques locales et c'est l'objet du **troisième chapitre**. Une échelle spatiale de la dispersion des contraintes locales est mise en évidence, et on constate qu'elle est supérieure à la taille de grain. Ainsi pour un petit défaut dont la taille est proche de celle de la microstructure, l'hétérogénéité des contraintes locales jouera un rôle non négligeable sur le seuil de non-propagation. La dispersion des contraintes locales et son échelle spatiale associée sont donc intégrées au critère mis en place au chapitre précédent.

---

---

## 1. CADRE POUR UNE APPROCHE PROBABILISTE UNIFIEE POUR LA FATIGUE

Lors d'une campagne d'essais de fatigue, les durées de vie ( $N$ ) obtenues pour chaque niveau de contrainte ( $S$ ) sont généralement dispersées. Des courbes S-N isoprobables sont définies à l'issue de la campagne d'essai. Les approches de type déterministes consistent à prévoir la durée de vie d'une pièce, en s'appuyant sur un critère déterministe et sur les courbes S-N isoprobables.

Cette démarche a deux inconvénients principaux. Comme elle ne prend pas en compte l'origine physique de la dispersion des durées de vie, telle que la présence d'inclusions de céramiques par exemple, elle ne permet donc pas d'émettre des préconisations sur le matériau ou les procédés. Par ailleurs, elle ne permet pas non plus de rendre compte des effets d'échelle entre une éprouvette et une pièce moteur ou bien entre une pièce et une « flotte » de pièces semblables. Les méthodes probabilistes sont donc un complément nécessaire aux outils déjà existants pour la prédiction des durées de vie en fatigue.

L'objet de cette étude consiste à développer un modèle probabiliste « unifié » pour la prévision des durées de vie en fatigue. En effet, à l'heure actuelle à SNECMA, il existe une méthode probabiliste par application. Pourtant, dans tous les cas les sources d'aléa considérées sont des défauts, auxquels on peut associer une distribution statistique : des Hard- $\alpha$  dans les alliages de Titane, des inclusions de céramique, des carbures ou des porosités dans les superalliages, et pour tous les matériaux des défauts de surface, tels que des rayures par exemple. On souhaite donc, à partir des méthodes existantes, unifier la démarche probabiliste pour l'ensemble des applications.

Afin de construire un modèle probabiliste, il est nécessaire d'identifier les sources d'aléa dans les processus physiques d'amorçage des fissures. La première partie de ce chapitre liste les différentes sources d'aléa rencontrées et évalue leurs influences respectives dans la dispersion observée dans le mécanisme de fatigue. Dans la seconde partie, une analyse bibliographique mettra en évidence de quelle façon ces sources d'aléa sont prises en compte dans les modèles de fatigue existants dans la littérature. Dans la troisième partie, nous présenterons le contexte industriel. Un regard particulier sera porté sur la position des différentes démarches probabilistes utilisées par SNECMA vis-à-vis des mécanismes de fatigue identifiés et vis-à-vis des modèles probabilistes de la bibliographie. Ces réflexions nous conduiront à établir les bases d'un modèle qui soit capable d'unifier ces méthodes.

### *1.1.Sources d'aléa dans les mécanismes physiques d'initiation*

Le phénomène de fatigue se manifeste lorsqu'un matériau est soumis à l'application de cycles mécaniques ou thermomécaniques. La répétition de ces cycles peut conduire à la rupture, et cela même pour des contraintes apparentes relativement faibles, inférieures à la limite d'élasticité du métal [Suresh,1998] , [Bathias,1980].

On peut dégager trois phases dans le processus de ruine d'un composant : la phase d'amorçage, la phase de propagation et la phase de rupture finale. L'amorçage d'une microfissure provient des concentrations de contraintes locales, qu'elles soient dues à la présence d'un défaut, d'une interface (joint de grain, surface libre...) ou d'un accident géométrique (perçage ...). Parmi toutes les sources de concentration de contraintes locales,



certaines ont une très forte probabilité d'existence et induiront un aléa très faible sur les durées de vies. Il s'agit en particulier de tous les mécanismes d'amorçage à partir des éléments de la microstructure du matériau (joints de grains, précipités ...) et des dislocations qui permettent la plasticité du matériau. A l'inverse d'autres sources de concentration de contraintes locales sont très peu probables et induiront donc un aléa important sur les durées de vie en fatigue. Dans tous les cas, la sollicitation de fatigue permet de créer une fissure de fatigue depuis une concentration de contrainte locale.

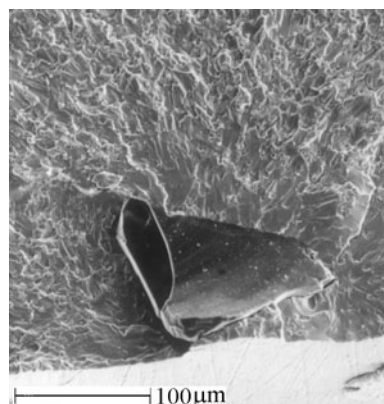
On distinguera donc deux types d'amorçage :

- **Amorçage sur défauts** : amorçage de fissure à partir de défauts extrinsèques au matériau provenant de l'élaboration, des procédés de transformation ou bien de l'usage (inclusions, rayures...). Les sources de concentrations de contraintes sont rares et pré-existent à la sollicitation de fatigue.
- **Amorçage par micro-plasticité cyclique** : amorçage à partir de concentrations de contraintes intrinsèques au matériau (joints de grains, précipités, bandes de glissements persistantes). Les sources de concentrations de contraintes sont très nombreuses et sont générées ou bien s'accroissent du fait des micro-déformations plastiques cycliques (intrusions-extrusions à l'échelle du grain...).

### 1.1.1. Amorçage sur défauts

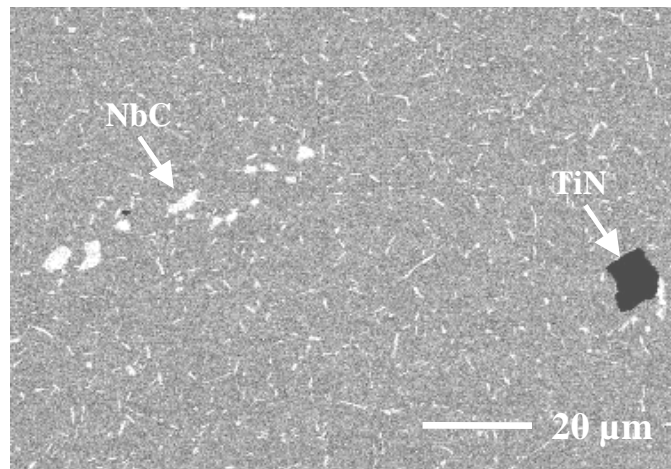
Les matériaux peuvent contenir des **hétérogénéités** qui constituent des sites privilégiés pour l'amorçage de fissures de fatigue. La dimension, la position, la forme et l'orientation des défauts sont conditionnées par le procédé de fabrication.

Ainsi dans les alliages élaborés par métallurgie des poudres, comme le superalliage à base de Nickel N18, on peut trouver des porosités (absence de cohésion entre grains de poudres) ou encore des inclusions de céramiques (Figure 1-1). Ces défauts sont rares et leur dimension maximale est bornée par le tamisage des poudres avant frittage. La dimension des inclusions de céramique ou des porosités est directement liée à la dimension maximale des poudres employées lors du frittage.



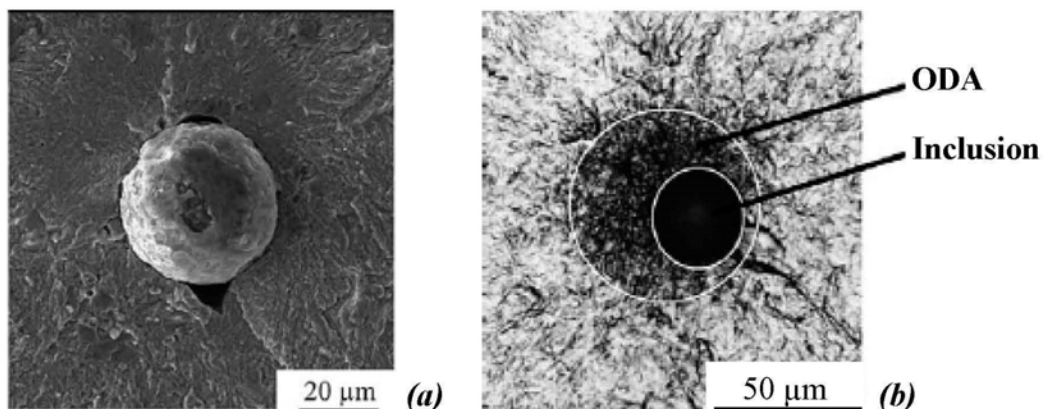
**Figure 1-1 : Amorçage d'une fissure de fatigue sur une inclusion de céramique subsurfacique. Alliage à base de nickel (N18) élaboré par métallurgie des poudres et ensemencé artificiellement par des inclusions de céramiques, afin de s'assurer de la présence d'une inclusion dans l'éprouvette de fatigue [Pommier,1995].**

Les défauts peuvent aussi être des **constituants du matériau**. On citera notamment l'exemple des carbures de niobium présents dans l'alliage INCO718 (Figure 1-2) qui sont à l'origine de l'amorçage de fissures de fatigue, et de la dispersion observée sur les durées de vie.



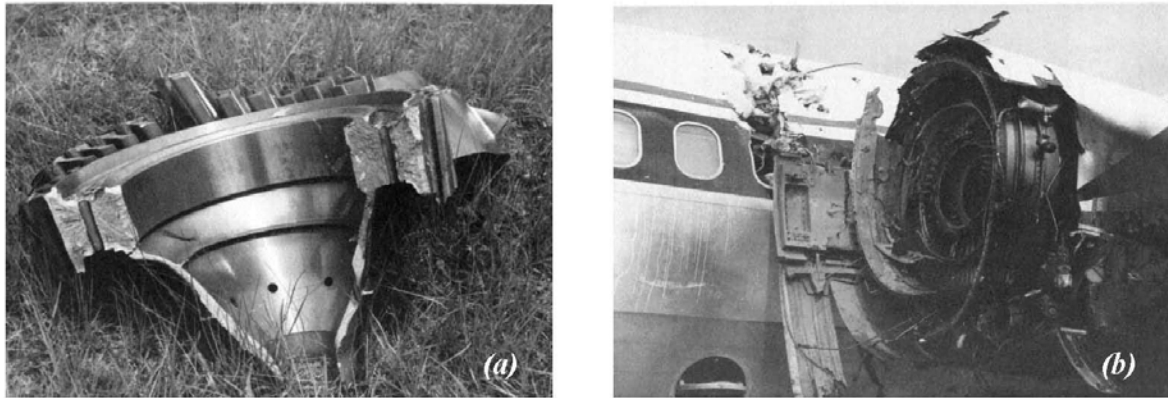
**Figure 1-2 : Microstructure du superalliage base Nickel 718RD contenant des nitrures (TiN) et des carbures de niobium (NbC) [Alexandre,2004].**

Les hétérogénéités du matériau peuvent aussi être le résultat d'**interactions avec l'environnement**. Des fissures peuvent s'amorcer en surface lorsque le matériau est plongé dans un environnement actif. Ceci peut aussi se produire au cœur du matériau, au voisinage d'inclusions. Y. Murakami et col. ont mis en évidence l'influence d'espèces fragilisantes – telles que l'hydrogène – présentes dans les inclusions sur la résistance à la fatigue de certains alliages [Murakami,2000a] , [Murakami,2000b]. Les inclusions non-métalliques emprisonnent l'hydrogène présent dans l'environnement et le libèrent progressivement sous l'effet des sollicitations mécaniques et du temps. On voit alors se former au microscope optique une zone fragilisée, plus sombre, autour de l'inclusion – appelée « Optically Dark Area » (Figure 1-3). La dimension effective du défaut à partir duquel peut se former une fissure de fatigue, augmente dans le temps et est proche de la dimension de la zone fragilisée (ODA).



**Figure 1-3 : (a) Inclusion subsurfacique dans un acier martensitique Cr-Mo, (b) « Optically Dark Area (ODA) » entourant l'inclusion [Murakami,2006].**

La dernière catégorie de défauts est constituée par les **défauts de fabrication, de maintenance et d'usage**. Les chocs et rayures qui peuvent survenir lors des opérations de maintenance, par exemple, peuvent constituer des sites privilégiés pour l'initiation de fissures de fatigue (Figure 1-4). Le retour d'expérience permet d'estimer la probabilité de création de défauts lors d'une opération de maintenance.



**Figure 1-4 : Accident de Pensacola, Floride en 1996 (a) Rupture du disque Fan d'un moteur McDonnell Douglas MD88 à partir d'un défaut d'usinage d'un perçage (b) Impact du disque sur la cabine.**

Les amorçages sur défaut conduisent à une **forte dispersion des durées de vie en fatigue**. Cette dispersion est liée d'une part au caractère aléatoire de la présence de ces défauts dans le matériau, et d'autre part à leur taille. Plus un défaut est grand, plus la rupture se produira tôt. Ainsi, si les défauts sont rares et dispersés en dimension, les durées de vie seront également dispersées autour de la durée de vie moyenne.

C'est le cas, notamment, pour les défauts Hard- $\alpha$  dans les alliages de Titane : la présence d'un défaut de ce type dans une pièce réduit de façon drastique sa durée de vie, mais heureusement la probabilité de rencontrer un défaut de ce type est extrêmement faible... Elle est si faible cependant, que les éprouvettes utilisées en laboratoire pour caractériser le matériau en fatigue ne contiennent pas de Hard- $\alpha$ . L'obtention « expérimentale » des durées de vie en présence de Hard- $\alpha$  n'est donc pas possible, à moins d'introduire intentionnellement des défauts lors de la réalisation des éprouvettes. Les informations dont on peut disposer sont issues du partage des retours d'expérience des différents constructeurs.

Au voisinage de telles hétérogénéités, même si le matériau de base n'est pas fragilisé (Figure 1-3), la concentration de contrainte peut être suffisante pour permettre la déformation plastique cyclique du matériau dans cette région. Le facteur de concentration de contrainte  $K_t$  d'une cavité sphérique, par exemple, est de 2. Le matériau peut donc se déformer plastiquement au voisinage de la cavité alors que la pièce travaille globalement en élasticité (Figure 1-5) dès que le niveau de contrainte « à l'infini » atteint la moitié de la limite d'élasticité du matériau. Une fissure peut alors se former par fatigue oligocyclique autour de la cavité et se propager ensuite jusqu'à la rupture ou bien s'arrêter, selon le niveau de contrainte appliqué à l'infini. Le nombre de cycle pour la nucléation d'une fissure peut alors être évalué, notamment à l'aide de la loi de Manson Coffin du matériau [Fan,2003] [Gall,2001].

D'autres mécanismes sont également invoqués pour l'amorçage de fissure au voisinage des défauts, tels que la fragilisation par les espèces fragilisante libérées par l'inclusion sous l'effet du cyclage [Murakami,2000a] [Murakami,2000b], ou bien la rupture fragile d'une inclusion de céramique [Beremin,1983].

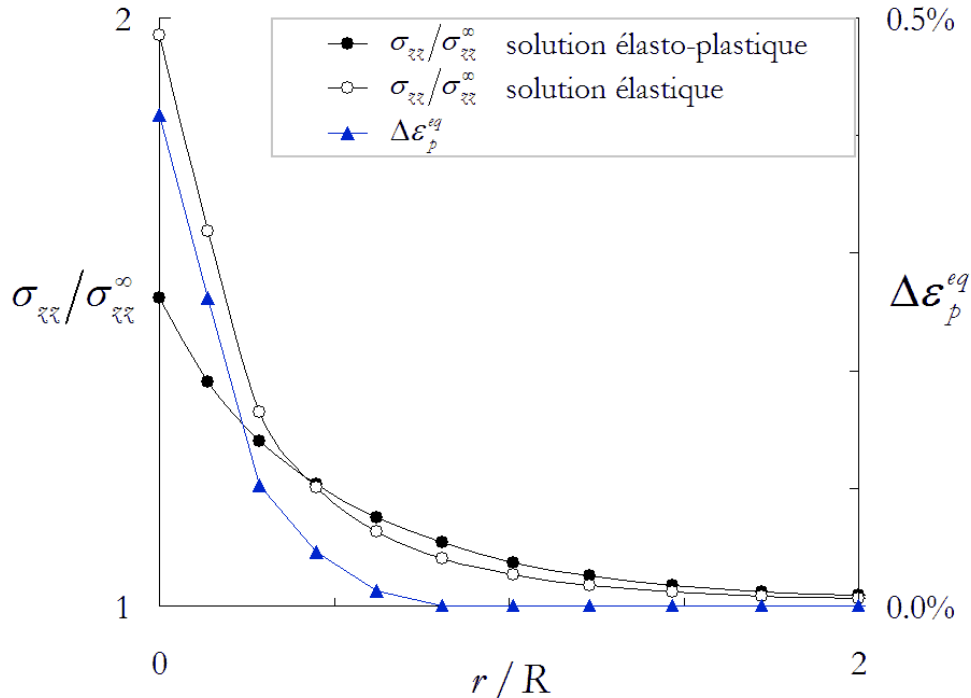


Figure 1-5 : Concentration de contrainte au voisinage d'une cavité sphérique. Solution élastique et exemple de solution élasto-plastique normalisées par la contrainte appliquée à l'infini. Amplitude de la déformation plastique cyclique au voisinage de l'inclusion pour le cycle stabilisé. Tracé en fonction de la distance à la cavité normalisée par la rayon de la cavité.

### 1.1.2. Amorçage par micro-plasticité

En l'absence de défaut dans le volume de matière testé, des fissures de fatigue s'initient néanmoins sous l'effet du chargement cyclique. Divers mécanismes sont proposés pour expliquer la formation de fissure et sont généralement associés à une **déformation plastique cyclique localisée en surface**, résultant du chargement cyclique appliqué à la structure.

En effet, si le comportement moyen macroscopique est élastique, certains grains bien orientés pour le glissement peuvent se déformer plastiquement tandis que leur environnement reste élastique. En général, ce sont les grains débouchant en surface et pour lesquels la cisssion résolue est maximale qui se déformeront les premiers [Miller,1973]. A l'échelle du grain, on constate alors la formation de **bandes de glissement** dès les premiers cycles de déformation (Figure 1-6.a). Si l'on poursuit la déformation, on observe l'apparition de bandes de glissement persistantes. Ces bandes ne disparaissent pas par simple polissage ou recuit, elles traduisent donc un endommagement irréversible du matériau et sont caractéristiques du phénomène de fatigue.

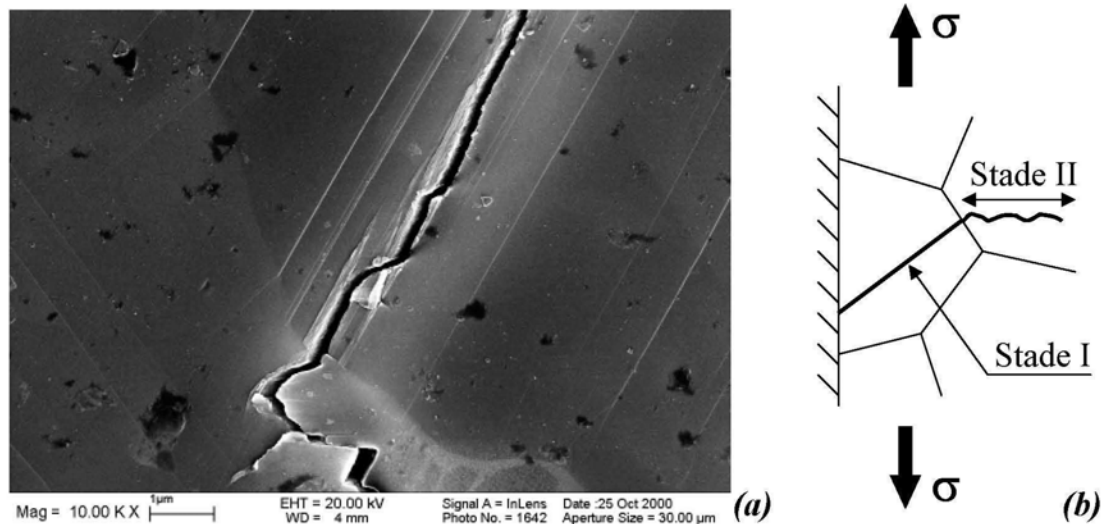


Figure 1-6 : (a) Amorçage d'une fissure de fatigue parallèlement aux lignes de glissement d'un grain, alliage de Titane [Le Biavant,2000] (b) Stades de propagation de fissure de fatigue.

Une coupe transversale à travers les bandes de glissement permet de visualiser la formation d'intrusions et d'extrusions (Figure 1-7) [Forsyth,1957] , [Cottrell,1957]. L'amorçage de microfissure se produit en fond d'intrusion, du fait des concentrations de contraintes générées.

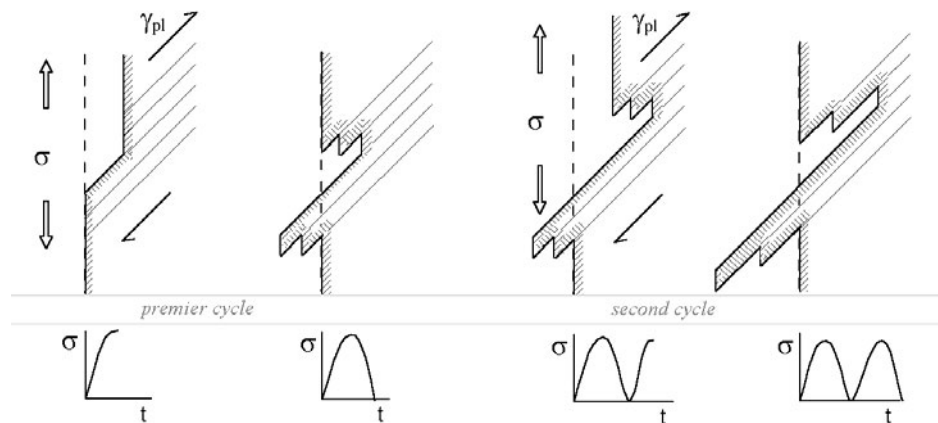


Figure 1-7 : Illustration du mécanisme de formation d'intrusions-extrusions à l'origine d'une fissure de fatigue [Pommier, 2001].

Les microfissures formées se propagent d'abord le long des plans de glissement cristallins : c'est le **stade I de propagation** (Figure 1-6.b). Lors de ce stade, la vitesse de propagation de la fissure est très lente (de l'ordre de quelques angströms par cycle) : le stade I représente donc une part importante de la durée de vie. En contrepartie, la surface fissurée correspondant à ce stade est faible par rapport à la surface fissurée totale. Le faciès fractographique associé est dépourvu de stries de fatigue et présente des facettes correspondant au plan de glissement persistant.

A partir d'une certaine profondeur, fonction de la taille de grain, la fissure change de direction : elle quitte le plan de cisaillement maximal et s'oriente selon le plan orthogonal à la contrainte principale maximum, c'est le **stade II de propagation** (Figure 1-6.b). La transition entre stade I et stade II est attribuée à la diminution progressive de la contrainte de cisaillement maximale en pointe de fissure avec la croissance de la fissure tandis que la

contrainte circonférentielle maximale augmente. En stade II, on observe les stries caractéristiques de la fatigue sur le faciès fractographique.

Kitagawa et Takahashi [Kitagawa et al.,1976] ont proposé un diagramme qui synthétise les différents stades de propagation rencontrés. Le diagramme de Kitagawa délimite le domaine de non-propagation : pour une taille de fissure initiale donnée, la contrainte appliquée conduisant à la propagation d'une fissure de fatigue jusqu'à la rupture de l'éprouvette est déterminée de façon expérimentale (Figure 1-8). Pour les fissures microstructuralement courtes, on constate que la limite de non-propagation est difficile à déterminer. Les fissures rencontrent plusieurs **barrières microstructurales** qui interrompent leur propagation. Des fissures peuvent s'initier à partir des défauts puis s'arrêter, le phénomène est aléatoire. Au-dessus d'une taille de fissure qui correspond à une barrière microstructurale « majeure », la limite de non-propagation est beaucoup moins dispersée. Les fissures ont une taille telle qu'elles sollicitent alors quelques grains et par conséquent la dispersion de la limite de non-propagation diminue par effet de moyenne. Lorsque la taille de fissure devient grande vis-à-vis de la microstructure, on n'observe plus de dispersion du tout.

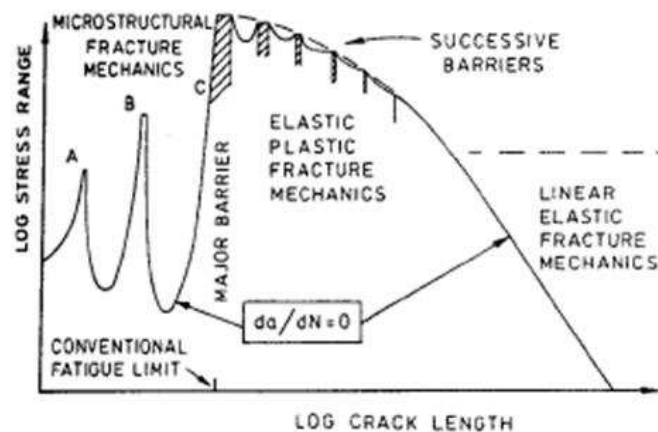


Figure 1-8 : Diagramme de Kitagawa [Miller,1987].

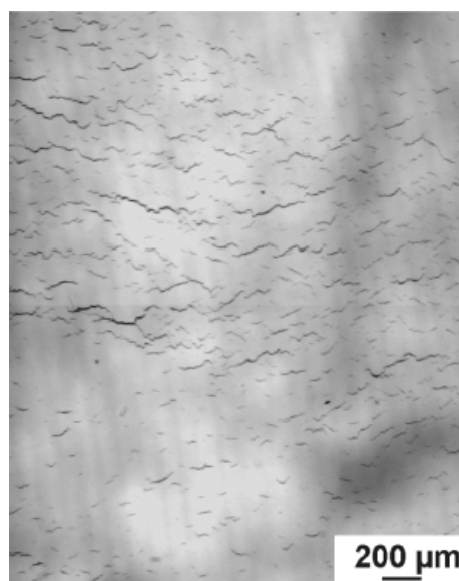


Figure 1-9 : Amorçage de nombreuses micro-fissures de fatigue à la surface d'un TA6V sollicité dans son domaine d'élasticité macroscopique [Le Biavant,2000].

D'un point de vue probabiliste, il est important de noter que les microfissures formées par microplasticité cyclique sont **nombreuses** (Figure 1-9), mais de petites tailles (de l'ordre de la taille de grain). Par conséquent, le phénomène de coalescence peut contribuer à la propagation de ces fissures.

Pour résumer, des microfissures peuvent être formées par microplasticité dans des grains bien orientés pour le glissement. La proportion de grains actifs plastiquement peut être assez importante dans le matériau, les microfissures initiées sont donc nombreuses, ce qui rend le phénomène faiblement aléatoire. Ensuite, la propagation en stade I de ces microfissures est aléatoire, certaines microfissures pourront se propager tandis que d'autres s'arrêteront, pour un même niveau de contrainte macroscopique, selon la configuration de leur environnement proche. Cependant, lorsque l'on se place à l'échelle de la structure, sauf si les dimensions de l'objet ou de la zone critique sont commensurables aux grains, cette dispersion est moyennée par le grand nombre de fissures susceptible de s'initier (Figure 1-9).

En pratique, cela a permis de justifier que des essais d'auto-échauffement puissent permettre de caractériser la limite d'endurance du matériau « sain ». En effet, si le comportement du matériau apparaît comme élastique à l'échelle macroscopique, mais que quelques grains se déforment néanmoins plastiquement à chaque cycle, le matériau s'auto-échauffe progressivement. La courbe d'auto-échauffement en fonction de l'amplitude de contrainte appliquée permet de définir le seuil (éventuellement distribué en fonction de  $\Delta\sigma$ ) en deçà duquel la microplasticité et, par conséquent, l'amorçage de fissure de fatigue par microplasticité ne se produit pas. Une seule éprouvette permet de caractériser la limite d'endurance (et éventuellement sa distribution) du matériau « sain » [Cugy,2002], [Doudard,2007], [Poncelet,2007].

### 1.1.3. Synthèse sur les sources d'aléa

On distingue deux types d'amorçage conduisant à la propagation d'une fissure de fatigue :

- amorçage sur défauts (hétérogénéités dues au procédé d'élaboration ou de mise en œuvre des pièces, défauts de surface créés lors du fonctionnement ou lors d'opérations de maintenance ou de contrôle...)
- amorçage par microplasticité (à partir de grains subissant localement une déformation plastique cyclique tandis que la pièce est globalement élastique)

La faible probabilité de présence de défauts dans le matériau ou à la surface des pièces, ainsi que leur distribution en taille conduisent à un aléa important sur la limite d'endurance et sur la durée de vie des pièces. Il est important de retenir que le volume de matière total testé lors d'une campagne d'essais de fatigue peut être trop faible pour caractériser cet aléa lors des essais sur éprouvettes.

A l'inverse, sauf pour des zones critiques commensurables à quelques dizaines de grains, le nombre de grains susceptibles de conduire à l'amorçage d'une fissure qui se propage jusqu'à la rupture dans une pièce industrielle est très grand. L'aléa sur la limite d'endurance ou sur la durée de vie associé à ce type de mécanisme d'amorçage est donc faible. Le volume d'une seule éprouvette de fatigue (de géométrie usuelle) pourra généralement être considéré comme représentatif du matériau pour ce mécanisme d'amorçage.

Ainsi, la dispersion observée sur les limites d'endurance ou sur les durées de vie en fatigue pour des composants industriels contenant potentiellement des défauts provient essentiellement du premier type d'amorçage, l'amorçage sur défauts.

### *1.2. Modèles probabilistes dans la bibliographie*

Les modèles probabilistes vont s'attacher à relier la dispersion observée expérimentalement sur les durées de vie aux sources d'aléa identifiées dans le processus de rupture par fatigue. Ils permettent de déterminer une probabilité de rupture en fonction du chargement et/ou du nombre de cycles. On a vu au paragraphe précédent que l'amorçage sur défauts constituait la source d'aléa majeure.

Les modèles probabilistes rencontrés dans la bibliographie peuvent être classés en deux grandes familles.

D'une part, les modèles de type « **approche directe** » où le caractère probabiliste est directement issu de la source d'aléa : un paramètre caractéristique de la taille de défaut intervient de façon explicite dans le critère. L'avantage principal de ce type d'approche est de lier explicitement les caractéristiques matériau utilisées en conception et la courbe de propriété du matériau qui est spécifiée aux fournisseurs.

D'autre part, les modèles de type « **approche indirecte** » où le caractère probabiliste n'est pas explicitement relié à la source d'aléa : un seuil en contrainte ou en énergie délimitant le domaine de non-propagation (ou de non-rupture locale) est défini et probabilisé. L'avantage



principal de ces approches est leur adéquation avec les méthodes de calcul utilisées en conception.

Ce paragraphe est donc consacré à la présentation de différents modèles probabilistes appartenant aux deux familles, afin d'illustrer les hypothèses, les avantages et les inconvénients qui leur sont propres.

### 1.2.1. Modèles probabilistes de type « approche directe »

La première famille de modèles probabilistes introduit donc explicitement les défauts comme source d'aléa du phénomène de fatigue. Le **critère de fatigue** utilisé fait intervenir un ou plusieurs paramètres caractéristiques de ces défauts (§1.2.1.1). La modélisation du caractère aléatoire du phénomène de fatigue consiste à représenter, analytiquement ou numériquement, la présence des défauts par une **distribution statistique de leurs caractéristiques** (taille, forme, position ...) (cf §1.2.1.2).

Le lien entre présence de défauts et limite d'endurance a fait l'objet de nombreuses études et dans un premier temps des relations empiriques ont été établies pour les aciers au carbone [Kitagawa,1976] [Murakami,1986]. On s'intéressera notamment au critère empirique de Murakami et Endo [Murakami,1986] qui permet de relier la limite de fatigue à la dureté Vickers du matériau ainsi qu'à un paramètre caractéristique de la dimension du défaut à l'origine de la rupture. Avec les mêmes objectifs, mais pour d'autres matériaux ou d'autres types de défauts, d'autres auteurs ont exprimé la limite de fatigue en se basant sur les hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture.

Moyennant certaines hypothèses, on exprime ainsi la limite d'endurance en fonction des caractéristiques d'un défaut et du matériau. Ensuite, afin de tenir compte d'une population de défauts – deux démarches sont possibles : d'une part l'hypothèse du maillon faible, et d'autre part les simulations de Monte Carlo.

Un avantage évident de ce type de modélisation est le lien direct qui existe entre la limite de fatigue et la taille de défaut. Les distributions de tailles de défauts peuvent correspondre aux courbes de propriété matériau (spécifiées aux fournisseurs), mais aussi à la probabilité de détection d'une fissure lors d'une inspection en fonction de sa taille et de la zone contrôlée...

Le second avantage est la capacité de ce type de démarche à prévoir les effets d'échelle sur les probabilités de rupture, à partir de la connaissance de la distribution de défaut par unité de volume de matière.

En revanche, ces approches ont certaines limitations. L'utilisation de la mécanique linéaire de la rupture, par exemple, est applicable lorsque les défauts sont grands et assimilables à des fissures. Cependant, la mécanique linéaire de la rupture n'est pas adaptée pour les défauts de très petite taille. Les modèles empiriques n'ont pas ces limitations, mais sont difficiles à identifier. Par ailleurs, ces modèles prennent difficilement en compte les chargements multiaxiaux.

Dans un premier temps nous allons présenter les relations établies entre la taille de défaut et la limite de fatigue pour quelques modèles probabilistes, qu'elle soit empirique ou bien basée sur la mécanique linéaire de la rupture. Puis nous montrerons comment est introduit le

caractère probabiliste dans le modèle, c'est-à-dire comment les populations de défauts sont prises en compte.

### 1.2.1.1. Relation entre taille de défaut et limite de fatigue

Murakami et Endo ont exprimé la limite de fatigue  $\sigma_f$  en fonction d'un paramètre – noté  $\sqrt{aire}$  – qui représente l'aire d'un défaut ou d'une fissure projetée sur le plan orthogonal à la direction principale du chargement [Murakami et al.,1986]. Cette approche est empirique et les expressions (1-1) ou (1-2) ont été établies à l'issue de campagnes d'essais de fatigue en traction uniaxiale alternée pour divers aciers au carbone. Après rupture et expertise des ruptures, la dimension du défaut à l'origine de la rupture était déterminée. Selon que le défaut se trouve en surface ou en volume deux tendances ont été dégagées. La limite de fatigue est plus élevée pour les défauts internes que pour les défauts de surface.

Cette modélisation est valide pour des petits défauts réels, tels que le paramètre  $\sqrt{aire}$  soit compris approximativement entre 5  $\mu\text{m}$  et 1000  $\mu\text{m}$ . Les **relations empiriques** établies pour des rapports de charge  $R = -1$  sont les suivantes :

$$\sigma_f = 1,43 \frac{(HV + 120)}{\left(\sqrt{\sqrt{aire}}\right)^{1/3}} \quad \text{pour des défauts surfaciques} \quad (1-1)$$

$$\sigma_f = 1,56 \frac{(HV + 120)}{\left(\sqrt{\sqrt{aire}}\right)^{1/3}} \quad \text{pour des défauts internes} \quad (1-2)$$

où  $HV$  est la dureté Vickers du matériau, exprimée en  $\text{kgf/mm}^2$ , tandis que le paramètre  $\sqrt{aire}$  est en  $\mu\text{m}$ . La limite de fatigue calculée est en MPa.

Lorsque la taille de défaut devient inférieure à 5  $\mu\text{m}$ , on sort du domaine de validité des expressions empiriques (1-1) ou (1-2), la limite de fatigue, qui devient indépendante de la dimension du défaut, est alors exprimée en fonction de la dureté Vickers du matériau (1-3) :

$$\sigma_f = 1,6 HV \quad (1-3)$$

Comme on peut le voir sur la Figure 1-10, ces formules empiriques permettent de reproduire l'effet de taille de défaut sur la limite d'endurance décrit par Kitagawa et Takahashi [Kitagawa,1976] (Figure 1-8.a) et observé lors de campagnes d'essais de fatigue pour divers aciers [McEvily,2003].

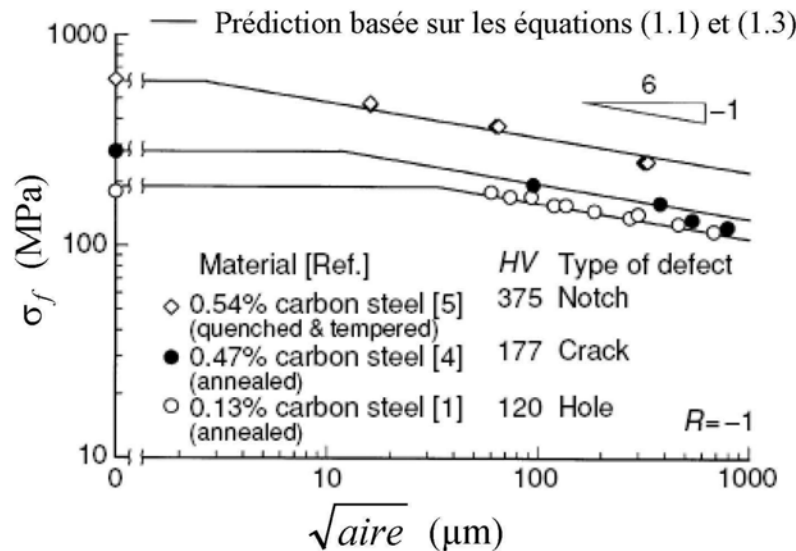


Figure 1-10 : Dépendance de la limite de fatigue  $\sigma_f$  au paramètre  $\sqrt{aire}$  pour des éprouvettes contenant des défauts initiaux [McEvily,2003].

Ce critère présente l'avantage d'être d'une extrême simplicité et, une fois validé, de ne pas nécessiter de campagne d'essais de fatigue pour être identifié. Il s'applique aux défauts réels et n'impose donc pas de faire des hypothèses sur la forme des défauts. Cependant, ayant été établi de façon empirique, il n'est applicable que pour une famille d'aciers donnée et ne peut pas être utilisé en dehors.

Par la suite, d'autres auteurs ont également cherché à établir une relation entre la taille de défaut et la limite d'endurance qui ne soit pas empirique mais basée sur une **modélisation du défaut**.

En général, les **défauts sont assimilés à des fissures** et le lien entre la limite de fatigue du matériau et la dimension du défaut est fait dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture en s'appuyant sur un seuil de non-propagation ou de rupture. Certaines hypothèses doivent alors être faites :

- **Géométrie de la fissure indépendante de sa dimension** : les défauts, assimilés à des fissures, sont représentés par un paramètre unique caractéristique de la dimension de la fissure. Le plus souvent, les fissures sont supposées être circulaires pour les défauts en volume ou semi-circulaires pour les défauts de surface, et caractérisées par leur seul rayon  $a$ .
- **Taille des défauts suffisamment grande** : les hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture doivent être valides. C'est-à-dire que la dimension du défaut doit être grande devant la microstructure et devant la dimension de la zone plastique.

A partir de ces hypothèses, le facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure peut être exprimé en fonction du chargement appliqué et de la taille du défaut. Ainsi, dans ses travaux, I. Chantier [Chantier,2000] suppose que le facteur d'intensité des contraintes suit la relation suivante :

$$K_I = Y \sigma_{\max} \sqrt{a} \quad (1-4)$$

où  $Y$  est un paramètre adimensionnel caractéristique de la géométrie de la fissure [Murakami,1981] et où  $\sigma_{\max}$  est la contrainte principale maximale.

Elle choisit par ailleurs le critère de rupture suivant : la rupture intervient dès que le facteur d'intensité des contraintes atteint un facteur d'intensité des contraintes critique du matériau noté  $K_{Co}$ .

$$K_I \geq K_{Co} \Rightarrow \text{rupture} \quad (1-5)$$

En combinant les équations (1-4) et (1-5), I. Chantier établit la relation suivante entre la limite de fatigue et la taille de défaut, pour les grands défauts (domaine de validité de la mécanique linéaire de la rupture) :

$$\sigma_f = \frac{K_{Co}}{Y \sqrt{a_{co}}} \quad (1-6)$$

La même démarche a été employée également par d'autres auteurs [Laz et al.,1998] [Luo et al.,2003]. Il faut noter que deux conditions sont nécessaires pour que cette approche soit applicable, d'une part que le défaut soit suffisamment grand pour que les hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture soient applicables et d'autre part, pour une pièce complexe, que le défaut reste suffisamment petit devant les gradients de contraintes existant dans la pièce pour que la contrainte  $\sigma$  puisse être considérée comme uniforme au niveau du défaut.

On note que la limite de fatigue évolue ici comme l'inverse de la racine de la dimension du défaut, tandis que dans les critères empiriques de Murakami et Endo, la limite de fatigue évolue comme l'inverse de la dimension du défaut à la puissance 1/6.

En plus d'être un moyen d'établir la relation entre la limite d'endurance d'un matériau et la taille de défaut, la mécanique linéaire de la rupture permet aussi **d'estimer la durée de vie de la structure** : cette durée de vie correspond au nombre de cycles nécessaire au défaut considéré pour atteindre la taille de défaut critique, c'est-à-dire la taille de défaut qui mènera à rupture pour le chargement considéré. Des modèles probabilistes ont été établis uniquement dans ce but et par conséquent n'utilisent pas explicitement la relation entre la taille de défaut et la limite de fatigue. Elle existe néanmoins, de façon « cachée », dans leurs modèles.

C'est le cas pour le modèle probabiliste établi par Laz et Hillberry [Laz et al.,1998] pour déterminer la durée de vie d'alliages d'aluminium à partir de fissures initiées sur des inclusions. Un modèle déterministe de propagation est mis en place, qui prend en compte les effets de fissures courtes via les phénomènes de fermeture de fissure et de plasticité en pointe de fissure. Les défauts sont modélisés par des fissures semi-circulaires d'aire équivalente. La durée de vie est gouvernée par  $\Delta K_{th}$ , le facteur d'intensité des contraintes seuil de non-propagation. Ainsi, pour une géométrie de fissure donnée, la relation entre le facteur d'intensité des contraintes et la taille de la fissure permet de déterminer la dimension initiale de la fissure qui conduit à la rupture. Luo et Bowen [Luo et al.,2003] ont proposé une méthode probabiliste de prévision de durée de vie du même type pour les alliages formés par métallurgie des poudres.

Les modèles évoqués ci-dessus font appel à la mécanique linéaire de la rupture avec comme postulat de départ la représentation du défaut par une **fissure équivalente**. C'est une

hypothèse assez raisonnable pour les inclusions de céramiques, par exemple, dont le module est nettement supérieur à celui du métal de base. Si l'interface métal-inclusion résiste, alors les contraintes dans l'inclusion sont supérieures à celles régnant dans le métal de base, ce qui peut conduire à la rupture fragile de la céramique et à l'apparition d'une véritable fissure.

Cependant, ce type de modélisation s'avère relativement pénalisant dans de nombreux autres cas. Notamment dans le cas de porosités, de retassures ou d'inclusions présentant une interface faible avec le métal de base. Dans ces cas là, une fissure peut se former par fatigue oligocyclique au voisinage du défaut, mais ceci requiert un certain nombre de cycles et ne se produit que si le niveau de contrainte est suffisant dans la zone à concentration de contrainte du défaut.

Nadot et Billaudeau proposent de prendre en compte les concentrations de contraintes non-homogènes au voisinage du défaut dans l'expression d'un critère de fatigue [Nadot,2006]. Pour cela, ils ont étudié numériquement la déformation plastique au voisinage d'une porosité (ou d'un vide) et ont ainsi mis en évidence le fait que le gradient de la contrainte hydrostatique serait un paramètre caractéristique de l'influence du défaut sur la limite de fatigue.

#### **1.2.1.2. Prise en compte d'une population de défauts : introduction du caractère probabiliste**

La modélisation du caractère aléatoire du phénomène de fatigue consiste à représenter la **population de défauts** par une ou plusieurs variables aléatoires distribuées statistiquement. Dans le paragraphe précédent nous avons vu comment lier la limite de fatigue à la dimension d'un défaut ou à sa position. Ce paragraphe montre comment généraliser ceci à une population complète de défauts d'un matériau.

##### **a) Théorie du maillon faible**

Pour appliquer la théorie du maillon faible à la fatigue, un certain nombre d'hypothèses doivent être vérifiées :

- **Indépendance des défauts** : comme les défauts sont assez rares, les coalescences entre fissures issues de divers défauts peuvent généralement être négligées.
- **Criticité croissante des défauts avec leur taille** : une fissure qui a commencé à se propager pourra se propager jusqu'à la rupture, c'est-à-dire que l'on n'envisage pas les cas où une fissure voit sa vitesse de propagation diminuer. Alors, pour un niveau de sollicitation donné, c'est toujours le défaut le plus grand qui conduit le premier à la rupture.

La **théorie du maillon faible**, comme son nom l'indique, représente le problème comme une chaîne formée de maillons. Prévoir la rupture de la chaîne consiste à prévoir la rupture du maillon le plus sollicité ou le moins résistant de la chaîne.

On considère donc que la structure survit si et seulement si aucun de ses éléments de volume ne se rompt. Avec l'hypothèse que la rupture d'un élément de volume ne dépend que de ce qu'il s'y passe et pas des éléments voisins (pas de coalescence entre fissures) on peut écrire

que la probabilité de survie  $P_{S \text{ structure}}$  de la structure de volume  $V$  sera égale au produit des probabilités de survie  $P_{S \text{ élément}}$  de chaque élément de volume  $V_i$  :

$$P_{S \text{ structure}} \left( V = \bigcup_{i=1}^n V_i \right) = \prod_{i=1}^n P_{S \text{ élément}} (V_i) \quad (1-7)$$

En s'appuyant sur les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme, il vient :

$$P_{S \text{ structure}} \left( V = \bigcup_{i=1}^n V_i \right) = \exp \left( \sum_{i=1}^n \ln(P_{S \text{ élément}} (V_i)) \right) \quad (1-8)$$

Et en supposant que les sous-volumes  $V_i$  sont très petits devant  $V$ , il vient :

$$P_{S \text{ structure}} (V) = \exp \left( \int_V \ln(P_{S \text{ élément}} (dV)) \right) \quad (1-9)$$

L'hypothèse du maillon faible permet d'écrire que la probabilité de rupture  $P_R$  est le complément à 1 de la probabilité de survie  $P_S$ , soit :

$$P_{R \text{ structure}} (V) = 1 - \exp \left( \int_V \ln(1 - P_{R \text{ élément}} (dV)) \right) \quad (1-10)$$

On se donnera ensuite une expression de la densité volumique de probabilité de rupture ou de survie en fonction des variables du problème (contrainte appliquée, taille de défaut).

Par exemple, le modèle probabiliste développé par I. Chantier [Chantier,2000] est basé sur la théorie du maillon faible appliquée à la fatigue. Supposons un volume élémentaire  $V_0$ , la répartition des défauts dans ce volume est définie par une densité de probabilité initiale notée  $f_0$ . Cette densité évolue au cours des cycles du fait de la propagation des fissures par fatigue sous l'effet de l'amplitude des contraintes  $\Delta\sigma$  et on note  $f_N$  la densité de probabilité au bout de  $N$  cycles.

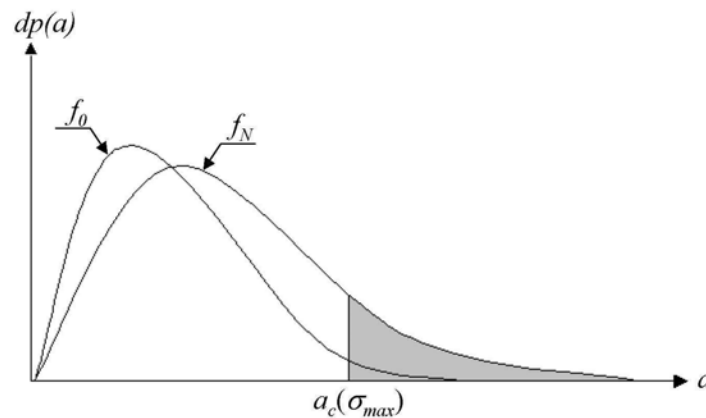


Figure 1-11 : Evolution de la densité de probabilité en fonction du nombre de cycles  $N$ .

La probabilité de rupture du volume élémentaire  $V_0$  – notée  $P_{F0}$  – correspond à la probabilité de trouver, dans ce volume  $V_0$ , au moins un défaut de taille supérieure ou égale à  $a_c$ , la taille critique de défaut permettant la rupture brutale sous la contrainte  $\sigma_{\max}$  régnant dans l'élément. Cela revient donc à considérer la queue de la distribution de défauts (zone grisée sur la Figure 1-11) :

$$P_{F0} = \int_{a_c}^{+\infty} f_N(a) da \quad \text{avec} \quad a_c = \left( \frac{K_{IC}}{Y \sigma_{\max}} \right)^2 \quad (1-11)$$

En supposant qu'aucun nouveau défaut n'est apparu au cours de la sollicitation de fatigue, la probabilité de trouver un défaut de taille  $a_c$  au bout de  $N$  cycles est égale à la probabilité de trouver un défaut de taille initiale  $a_{c_0}$  ( $a_{c_0}$  est la taille de défaut initiale qui devient critique au bout de  $N$  cycles). La probabilité de rupture cumulée du volume élémentaire  $V_0$  peut donc s'exprimer en fonction de la densité de probabilité initiale  $f_0$  :

$$P_{F0} = \int_{a_{c_0}}^{+\infty} f_0(a) da \quad (1-12)$$

On en déduit qu'avec ces hypothèses, plus la durée de vie de la pièce est grande, plus la taille initiale de défaut critique diminue : on active d'avantage de petits défauts ainsi que des défauts considérés au départ comme moins nocifs (comme les défauts internes).

On considère maintenant une structure complexe de volume  $V$ , constituée des volumes élémentaires  $V_0$  soumis à des contraintes différentes. On applique cette fois la théorie du maillon faible à la structure : il y a rupture de la structure si un élément de volume vient à rompre. La probabilité de rupture cumulée  $P_F$  est alors liée aux probabilités de rupture élémentaires  $P_{F0}(\sigma_{\max})$  par la relation :

$$P_F = 1 - \exp \left[ \frac{1}{V_0} \iiint_{\Omega} \ln(1 - P_{F0}(\sigma_{\max})) dV \right] \quad (1-13)$$

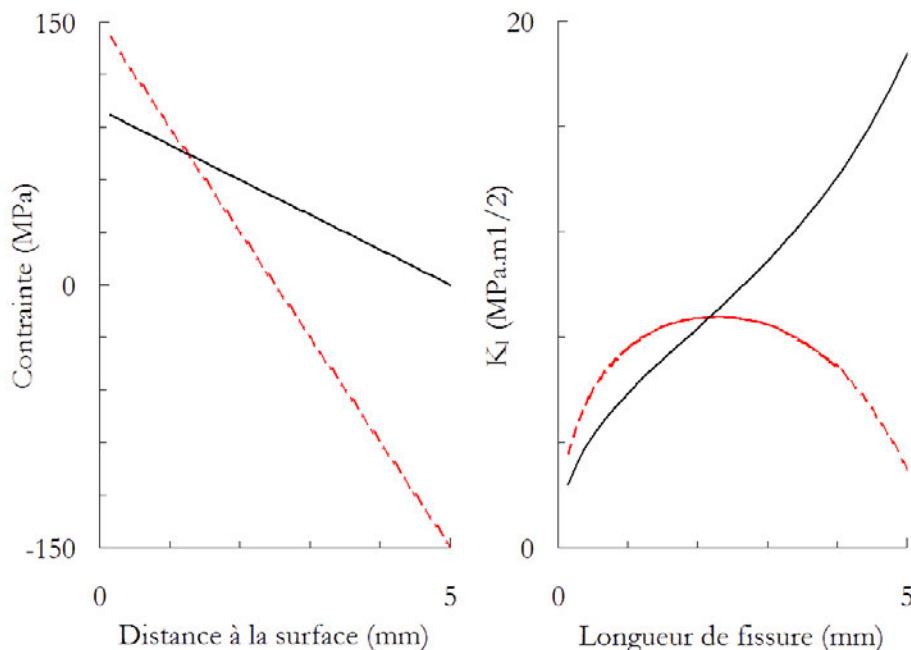
Cette approche s'applique aux défauts suffisamment grands pour que la mécanique linéaire de la rupture s'applique correctement et suffisamment petits pour qu'on puisse les supposer contenus dans un volume de référence dans lequel la contrainte locale  $\sigma_{\max}$  peut être supposée constante.

S. Beretta propose une approche similaire pour intégrer un caractère probabiliste au critère de Murakami et Endo [Beretta,2003]. Il suppose que la dispersion des propriétés en fatigue d'un matériau est contrôlée par la dispersion des tailles de défauts. Partant de là, la limite de fatigue est notamment contrôlée par la taille du plus grand défaut. Plutôt que de considérer la population de défauts dans son entier, la distribution de tailles de défauts est identifiée sur les plus grands défauts relevés sur des éprouvettes de fatigue.

### b) Méthode de Monte Carlo

Une autre méthode pour tenir compte des populations de défauts consiste à effectuer de nombreux tirages aléatoires, et à simuler pour chaque réalisation la vie de la pièce. Il s'agit de la **méthode de Monte Carlo**. Elle consiste à définir un certain nombre de variables aléatoires caractéristiques, par exemple la dimension et la position des défauts, et à leur affecter une distribution de probabilités par intervalle. Cette approche – contrairement à la précédente – est donc discrète. Un grand nombre de tirages des variables aléatoires d'entrée est effectué, selon les distributions de probabilité déterminées précédemment. Et pour chaque réalisation, une simulation est effectuée. Ceci permet de déterminer la probabilité d'occurrence de chacun des résultats. La méthode est simple à mettre en œuvre mais l'inconvénient de cette méthode est qu'elle impose en général des temps de calculs très longs. Mais elle peut aussi permettre de lever certaines hypothèses pénalisantes de la théorie du maillon faible.

L'avantage principal de la méthode de Monte-Carlo, par rapport à la théorie du maillon faible évoquée plus haut est qu'elle permet, en particulier, d'envisager des cas où le défaut le plus critique vis-à-vis de l'amorçage n'est pas celui qui conduit finalement à la rupture. Ceci peut se produire, par exemple, si une fissure commence à se propager depuis une concentration de contrainte puis voit sa vitesse diminuer du fait d'un gradient de contrainte décroissant. Dans ce cas, un défaut moins critique vis-à-vis de l'amorçage pourra être plus critique vis-à-vis de la durée de vie. Ceci peut être observé par exemple dans des pièces travaillant en flexion. Par exemple, sur la figure (Figure 1-12) on compare les évolutions du facteur d'intensité des contraintes d'une fissure traversante initiée à la surface d'une plaque d'épaisseur 10 mm sollicitée en traction et flexion, pour deux gradients de contrainte selon l'épaisseur. Ces deux gradients pourraient correspondre à deux zones différentes d'une structure. Le défaut le plus critique pour l'amorçage n'est pas nécessairement celui qui conduira à la rupture finale, ce qui est contradictoire avec la théorie du maillon faible.



**Figure 1-12 : Plaque en flexion+traction d'épaisseur 10 mm. A gauche, deux gradients de contrainte correspondant à deux zones d'une structure. En ce qui concerne l'amorçage, un défaut dans la zone sollicité selon le gradient en pointillés forts est plus critique. Ce n'est plus le cas dès que le défaut s'est propagé de 2,5 mm.**



Cette méthode a donc été appliquée par divers auteurs pour prévoir le risque de rupture par fatigue dans une structure. Par exemple, dans leur modèle probabiliste de prévision de durées de vie pour les alliages d'aluminium, Laz et Hillberry modélisent la population de défauts par une loi log-normale standard à trois paramètres [Laz et al.,1998] :

$$f(a) = \frac{1}{(a - \tau)\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln(a - \tau) - \mu)^2}{2\beta^2}\right\} \quad (1-14)$$

où  $\tau$  représente un seuil,  $\beta$  un facteur de forme et  $\mu$  un facteur d'échelle.

Cette distribution de défauts est identifiée à partir de la distribution des particules ayant conduit à amorçage lors d'essais de fatigue sur éprouvettes. Elle est ensuite utilisée pour la prévision de la durée de vie d'une structure. Partant de cette distribution, et pour chaque réalisation, une aire de défaut initiale est tirée aléatoirement. A l'aide du modèle de propagation choisi, la durée de vie résultant de ce défaut initiateur est déterminée (le nombre de cycles requis pour l'amorçage d'une fissure est supposé négligeable, et la durée de vie est entièrement calculée en propagation). 1000 tirages aléatoires sont nécessaires pour représenter de façon correcte la distribution de tailles de défauts. Ce modèle probabiliste permet d'obtenir les distributions de durées de vie en fatigue dans des pièces de géométrie diverses.

Ce modèle a été repris quelques années plus tard par les mêmes auteurs de façon à prendre en compte la phase d'amorçage dans le phénomène de fatigue [Laz et al.,2001]. Les durées de vie à l'amorçage sont supposées suivre une distribution de Weibull, identifiée à partir d'essais de fatigue. Lors de l'application de la méthode de Monte Carlo, en plus de tirer aléatoirement une aire de défaut suivant la distribution donnée en équation (1-14), on tire aussi une durée de vie à amorçage. La durée de vie totale de la pièce est alors la somme de la durée de vie à amorçage et de la durée de vie en propagation calculée à partir du modèle de propagation.

Concernant le modèle de Luo et Bowen [Luo et al.,2003], les deux méthodes ont été testées : méthode analytique et simulation de Monte Carlo. La simulation de Monte Carlo donne des résultats plus proches des valeurs expérimentales. Les auteurs attribuent cela au fait que la solution analytique nécessite des hypothèses plus pénalisantes pour être calculée.

Ainsi pour des géométries complexes, il semble intéressant d'utiliser la théorie du maillon faible pour l'amorçage et un modèle de propagation pour la durée de vie.

### **1.2.2. Modèles probabilistes de type « approche indirecte »**

Les modèles probabilistes présentés ici ne font pas intervenir explicitement un paramètre caractérisant la géométrie du défaut. Le caractère probabiliste du critère provient de la probabilisation d'un seuil du critère de fatigue employé. Ils ont l'avantage d'être généralement plus simples que les approches directes à mettre en œuvre à partir des résultats d'un calcul de structure. Ils ont l'inconvénient de ne pas s'exprimer en fonction de la courbe de propreté matériau qui peut être spécifiée aux fournisseurs.

### 1.2.2.1. Approche contrainte-résistance

Considérons une structure, de résistance  $R$ , et soumise à un chargement  $\sigma$  ; on a rupture dès lors que la contrainte  $\sigma$  devient supérieure à la résistance  $R$ . Maintenant répétons cette expérience  $N$  fois, on constatera alors que les valeurs de  $R$  et de  $\sigma$  sont naturellement dispersées, et par conséquent on ne peut plus évaluer de façon déterministe la contrainte seuil de rupture.

L'approche en contrainte et résistance consiste à déterminer la probabilité pour que la résistance  $R$  de la pièce étudiée soit supérieure à la contrainte  $\sigma$  effectivement appliquée. Pour cela, on définit les distributions de  $R$  et de  $\sigma$  de moyennes respectives  $\mu_R$  et  $\mu_\sigma$ .

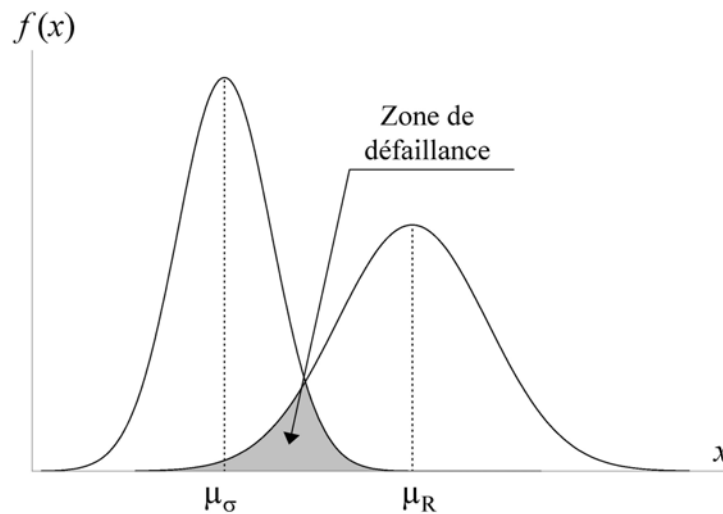


Figure 1-13 : Illustration de l'approche contrainte résistance.

Lorsqu'il y a recouvrement des deux lois de probabilités – ainsi que le présente la Figure 1-13 – la zone de recouvrement représente la « zone de défaillance » : la résistance  $y$  est susceptible d'être inférieure à la contrainte appliquée. La probabilité de défaillance s'écrit alors :

$$P_f = P(\sigma > R) = P\left(\frac{\sigma}{R} > 1\right) \quad (1-15)$$

Cela nécessite de connaître la densité de probabilité du rapport  $\sigma/R$ , ce qui est difficile a priori. Le calcul de la probabilité de défaillance peut aussi se faire à l'aide de la méthode de Monte Carlo, mais la vitesse de convergence est très lente.

Cette approche est la plus simple à mettre en œuvre et c'est pourquoi elle est couramment utilisée mais elle a l'inconvénient de ne pas modéliser correctement les effets d'échelle associés à la probabilité de présence de défauts par taille dans un volume donné.

### 1.2.2.2. Seuil probabilisé

La notion d'effet d'échelle est importante dans le cas d'amorçage sur défaut. En effet, le caractère aléatoire du phénomène de fatigue étant imputé à la présence de défauts dans le matériau, la probabilité de rupture va être très différente selon que l'on considère un tout petit volume de matière ou la pièce dans son ensemble (la probabilité de rencontrer un défaut étant alors beaucoup plus élevée). Les modèles présentés ici ne faisant pas intervenir de façon directe la population de défauts, ils doivent faire attention à employer des fonctions de probabilité respectant néanmoins cet effet de volume.

Un modèle très employé en mécanique probabiliste est le **modèle de Weibull** [Weibull,1951] qui s'emploie dans le cadre de la théorie du maillon faible. Il a été développé pour les matériaux fragiles et vise à établir une relation entre la probabilité de rupture et le chargement appliqué – la contrainte principale maximale pour un matériau fragile. La probabilité de survie d'un élément de volume  $V_i$ , soumis à une contrainte  $\sigma$ , est définie comme une fonction de la forme suivante :

$$P_{S \text{ élément}}(\sigma, V_i) = \exp[-\varphi(\sigma) \times V_i] \quad (1-16)$$

La probabilité de survie d'un élément de volume doit respecter quelques conditions asymptotiques. Par exemple, pour un matériau fragile, être égale à 1 si la contrainte principale maximale est négative ou nulle, et tendre vers zéro lorsque la contrainte principale maximale tend vers l'infini. Cela impose des conditions sur la fonction  $\varphi$  introduite dans l'équation (1-16). Une des solutions les plus simples et les plus utilisées pour la fonction  $\varphi$  est la **statistique de Weibull** [Weibull,1951] :

$$\begin{cases} \varphi(\sigma) = \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_u} \right)^m & \text{pour } \sigma \geq \sigma_s \\ \varphi(\sigma) = 0 & \text{pour } \sigma < \sigma_s \end{cases} \quad (1-17)$$

Par conséquent, la fonction définissant la probabilité de rupture d'un élément de volume en fonction de son volume  $V$  et de la sollicitation  $\sigma$  s'exprime :

$$\begin{cases} P_R = 1 - \exp \left[ -V \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_u} \right)^m \right] & \text{pour } \sigma \geq \sigma_s \\ P_R = 0 & \text{pour } \sigma < \sigma_s \end{cases} \quad (1-18)$$

La fonction  $\varphi$  de Weibull est choisie pour ses bonnes propriétés vis-à-vis de la théorie du maillon faible, pour laquelle on obtient la probabilité de rupture à partir du champ de contrainte dans la structure :

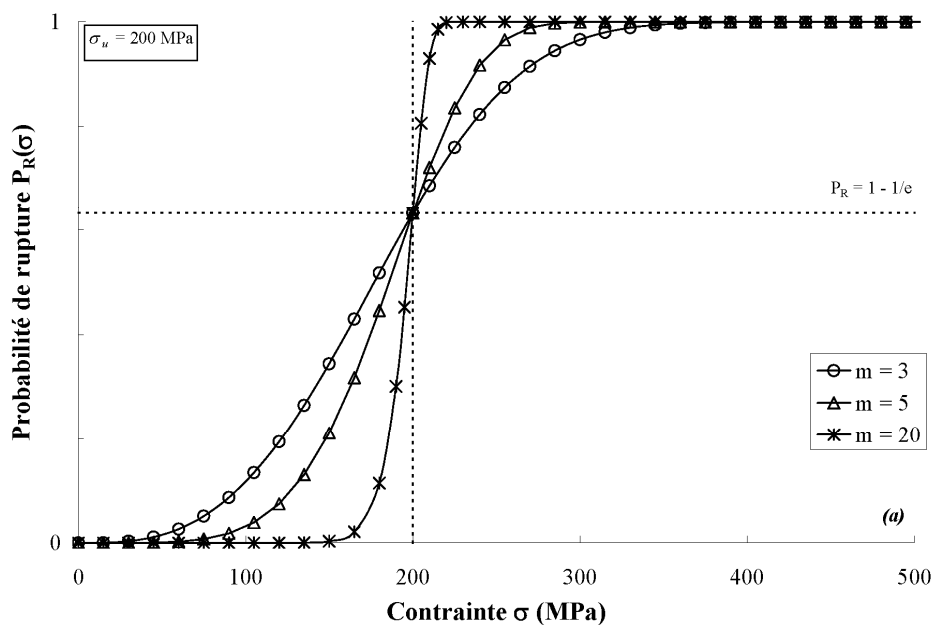
$$P_{R \text{ structure}}(V) = 1 - \exp \left( \int_V \ln(1 - P_{R \text{ élément}}(dV)) \right) = 1 - \exp \left( \int_V - \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_u} \right)^m dV \right) \quad (1-19)$$

La statistique de Weibull choisie pour ses bonnes propriétés mathématiques, permet cependant de bonnes corrélations avec les résultats expérimentaux. Pour des questions d'homogénéité, on peut être amené à introduire arbitrairement un volume  $V_u$  qui permet une simplification des unités. On écrit alors :

$$\begin{cases} P_R = 1 - \exp \left[ - \frac{V}{V_u} \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_u} \right)^m \right] & \text{pour } \sigma \geq \sigma_s \\ P_R = 0 & \text{pour } \sigma < \sigma_s \end{cases} \quad (1-20)$$

Il y a trois paramètres dans cette statistique. Ils ne sont pas directement liés à des grandeurs physiques mesurables, mais on peut tout de même déterminer leurs influences respectives :

- $m$  est appelé le **module de Weibull**. Il est caractéristique de la dispersion et donc de la forme de la courbe. Pour les valeurs croissantes de  $m$ , on réduit la dispersion et pour les valeurs décroissantes on l'augmente. Ce paramètre joue donc sur l'inclinaison de la courbe (Figure 1-14.a).
- $\sigma_s$  est appelée la **contrainte seuil**. Pour un chargement inférieur à cette contrainte seuil, la probabilité de rupture est nulle. La variation de ce paramètre entraîne donc une translation de la courbe suivant l'axe des abscisses.
- $\sigma_u$  est appelé le **facteur d'échelle**. Ce paramètre n'a pas de signification physique directe. Lorsque les autres paramètres sont fixés, il définit la position de la courbe selon l'axe des contraintes (Figure 1-14.b).



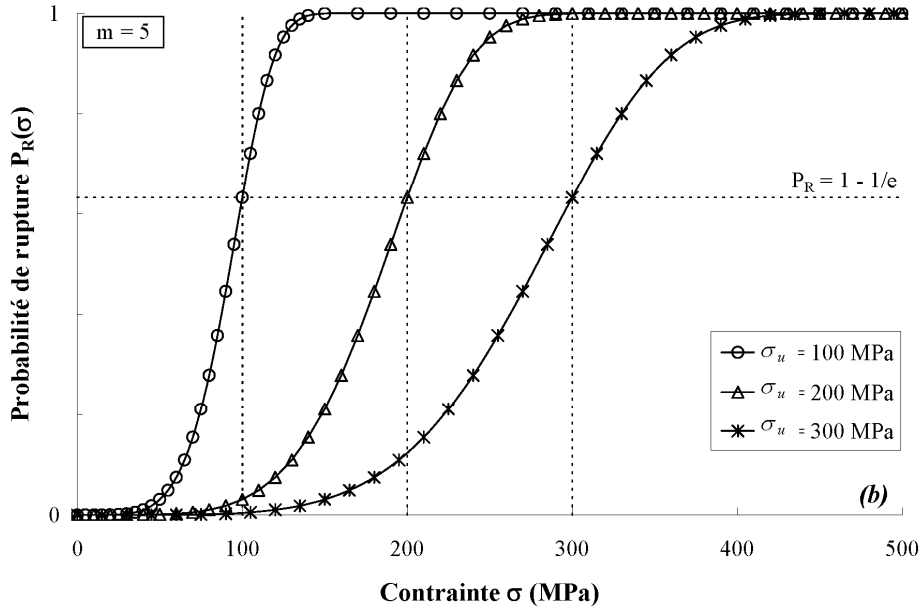


Figure 1-14 : Etude de l'influence des paramètres de la statistique de Weibull

 (a) Module de Weibull  $m$  (b) Facteur d'échelle  $\sigma_u$ .

De façon à simplifier l'identification des paramètres, la contrainte seuil est souvent considérée comme nulle, on a alors une loi de Weibull dite « à deux paramètres ».

On peut étendre la théorie précédente au cas où les éléments de volume ne sont pas soumis à une contrainte uniforme mais à un gradient de contrainte. L'expression de la probabilité de rupture de l'élément est alors la suivante :

$$P_R = 1 - \exp \left[ - \frac{1}{V_u} \int_V \left( \frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_u} \right)^m dV \right] \quad \text{pour } \sigma \geq \sigma_s \quad (1-21)$$

L'identification des paramètres  $m$  et  $\sigma_u$  de la statistique de Weibull se fait à partir de la dispersion expérimentale obtenue sur les résistances à la rupture des éprouvettes. On reporte les résultats expérimentaux dans un diagramme donnant  $\ln[-\ln(1 - P_R)]$  en fonction de  $\ln(\sigma)$ . Dans ce diagramme, si le matériau obéit à la loi de Weibull, et si  $V_u = V$ , on obtient alors une droite de pente  $m$  et d'ordonnée à l'origine  $(\ln(V) - m \ln(\sigma_u))$ , ceci d'après l'expression de la statistique de Weibull :

$$P_R = 1 - \exp \left[ - V \left( \frac{\sigma}{\sigma_u} \right)^m \right] \Rightarrow \ln[-\ln(1 - P_R)] = m \ln(\sigma) + \ln(V) - m \ln(\sigma_u) \quad (1-22)$$

L'intérêt de la statistique de Weibull réside dans la facilité de prendre en compte, via cette statistique, des **effets d'échelle** (Figure 1-15). Plus le volume de matière augmente, plus la probabilité de rencontrer un défaut menant à la rupture est grande. Les limites de fatigue obtenues expérimentalement sur éprouvettes sont donc plus dispersées et plus élevées que celles observées sur structure.

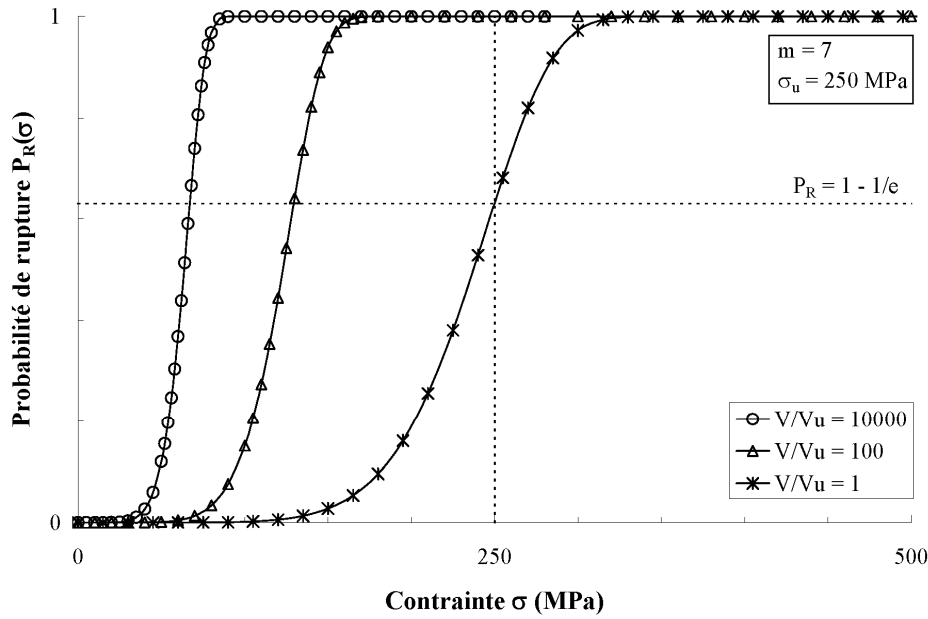


Figure 1-15 : Influence du volume de matière sollicité sur la probabilité de rupture calculée par la statistique de Weibull, dans le cas d'un champ de contrainte homogène.

Dans ce cadre, l'**approche de Bomas** [Bomas,1997] est basée sur l'hypothèse du maillon faible. L'auteur distingue les amorçages de fissures internes et surfaciques, et la probabilité de survie est – d'après la théorie du maillon faible – le produit des probabilités de survie associées à chacun de ces deux types de fissures :

$$P_s = P_s(\text{surface}) \times P_s(\text{volume}) \quad (1-23)$$

Les défauts sont distribués de façon égale en volume et en surface. Les probabilités de survie sont supposées suivre une description du type de celle de Weibull, à la différence près que pour les limites de fatigue  $\sigma_{fs}$  en surface et  $\sigma_{fv}$  en volume on obtient une probabilité de rupture de 50% :

$$P_s(\text{surface}) = 2^{-\frac{dS}{S_0} \left( \frac{\sigma_{DV}}{\sigma_{fs}} \right)^m} \quad (1-24)$$

$$P_s(\text{volume}) = 2^{-\frac{dV}{V_0} \left( \frac{\sigma_{DV}}{\sigma_{fv}} \right)^m} \quad (1-25)$$

où  $\sigma_{DV}$  est la contrainte équivalente au sens du critère de Dang Van [Dang Van,1973]. Le critère de Dang Van sera présenté de façon plus détaillée au chapitre 2.

Ainsi dans ce modèle, le seuil d'amorçage d'une fissure de fatigue est décrit à l'aide du critère de Dang Van, et ce seuil est probabilisé au moyen d'un modèle de type Weibull. L'utilisation par les auteurs de la contrainte équivalente de Dang Van permet d'appliquer leur modèle à divers chargements multiaxiaux de fatigue. De plus la combinaison avec un modèle probabiliste de type Weibull permet de prendre en compte les effets de volume.

Ces approches indirectes décrivent mal les effets de gradient sur la fatigue. En effet, comme il a été dit plus haut (Figure 1-12), lorsqu'un gradient de contrainte est présent dans une pièce, les fissures tendent à s'amorcer dans la zone où les contraintes sont maximales. Mais, plus tard au cours de leur propagation, ces fissures peuvent éventuellement s'arrêter. Aussi est-il utile pour définir le risque effectif de rupture par fatigue (et non pas le risque d'amorçage) de tenir compte des gradients de contrainte et pas seulement de la contrainte locale. Pour cela, des critères non-locaux sont développés par Morel et Palin-Luc [Morel et al.,2002] afin de palier certaines difficultés des approches indirectes.

Les auteurs [Morel et al.,2002] définissent d'abord une quantité d'intérêt pour le critère de fatigue (soit une amplitude de contrainte équivalente sur le plan critique, soit une moyenne de l'amplitude sur l'ensemble des plans, soit encore une amplitude d'énergie élastique de cisaillement...). Puis ils déterminent le point critique où cette quantité d'intérêt est maximisée et un volume d'influence  $V^*$  autour du point critique à l'intérieur duquel la quantité d'intérêt excède un seuil. Ensuite, c'est une moyenne de la quantité d'intérêt sur  $V^*$  qui sera utilisée pour définir le risque de rupture plutôt que sa valeur maximale en un point.

Par exemple, l'un des modèles probabilistes s'appuie sur le critère d'endurance de Papadopoulos [Papadopoulos,1993]. La contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  est définie comme étant la combinaison linéaire de l'amplitude de la cisssion sur le plan critique et de la pression hydrostatique maximale du cycle de fatigue. Un seuil  $\sigma_{eq}^*$  est défini, en dessous duquel aucun endommagement par fatigue ne peut se produire. Le volume d'influence  $V^*$  autour du point critique est alors défini comme suit :

$$V^* = \int_V H(\sigma_{eq} - \sigma_{eq}^*) dV \quad \text{où} \quad H(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0 \quad \text{et} \quad H(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 0 \quad (1-26)$$

Ces critères ont été combinés à une loi de Weibull à trois paramètres, de façon à obtenir un modèle probabiliste [Flacelière,2001] , [Morel et al.,2005].

### 1.2.2.3. Modèle probabiliste à deux échelles

Le modèle probabiliste à deux échelles, en introduisant une échelle supplémentaire, permet également de lever certaines difficultés liées à l'existence de gradients de contraintes. Il s'agirait ici, plutôt d'homogénéiser la contrainte à l'échelle à laquelle se produit l'endommagement de fatigue. Le modèle s'appuie sur l'hypothèse que l'endommagement en fatigue à grand nombre de cycles s'explique par des phénomènes de micro-plasticité. L'échelle considérée pour représenter cette micro-plasticité est plus petite que le volume élémentaire représentatif (VER) choisi pour définir le comportement moyen du matériau [Doudard,2004]. La structure est alors modélisée par un ensemble de zones élasto-plastiques, appelées inclusions et qui seront les lieux d'apparition de la microplasticité. Ces zones pourront être des grains, ou des retassures et leur voisinage, ou tout autre source de microplasticité localisée qui a une échelle propre. Ces inclusions élasto-plastiques sont entourées d'une matrice élastique (Figure 1-16). Chaque inclusion a un volume  $V_0$ , et une limite d'élasticité  $\sigma_y$ . L'étape de localisation (lien entre la contrainte locale  $\sigma$  de l'inclusion et la contrainte macro  $\Sigma$ ) est réalisée par l'équation suivante, valable pour un milieu isotrope et une forme d'inclusion sphérique :

$$\sigma = \Sigma - 2\mu(1 - \beta)\varepsilon^p \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{2(4 - 5\nu)}{15(1 - \nu)} \quad (1-27)$$

L'expression de  $\beta$  se déduit de l'analyse d'Eshelby,  $\mu$  est le module de cisaillement  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $\varepsilon^p$  représente la déformation plastique.

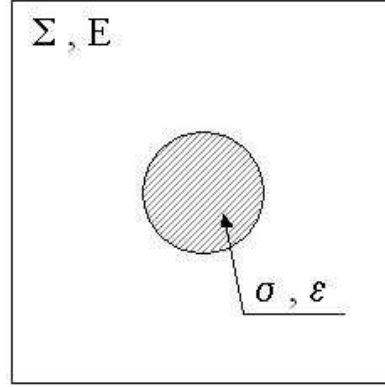


Figure 1-16 : Volume élémentaire représentatif du modèle à deux échelles.

Afin d'introduire l'aspect probabiliste dans ce modèle, on considère que l'on a une dispersion de la limite d'élasticité locale [Doudard *et al.*, 2004]. On appelle **site actif** une inclusion dont la limite d'élasticité est dépassée. Les sites actifs sont distribués de manière aléatoire dans la structure et l'auteur suppose que leur activation suive un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $\lambda$  dépendant du niveau de chargement. Ainsi le nombre de site actifs  $N(\Omega)$  sous l'amplitude de contrainte  $\Sigma_0$  dans un domaine  $\Omega$  de volume  $V$  est donné par :

$$N(\Omega) = \lambda.V \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\Sigma_0}{\sigma_0} \right)^m \quad (1-28)$$

$\sigma_0$  et  $m$  sont des paramètres dont on verra la signification par la suite.  $\lambda$  représente la densité moyenne de sites actifs. Elle est représentée par une loi puissance car l'évolution de la micro-plasticité en surface suit une loi puissance.

Avec un tel modèle, plus l'amplitude de chargement est grande, plus il y a de sites actifs dans le domaine considéré (Figure 1-17).



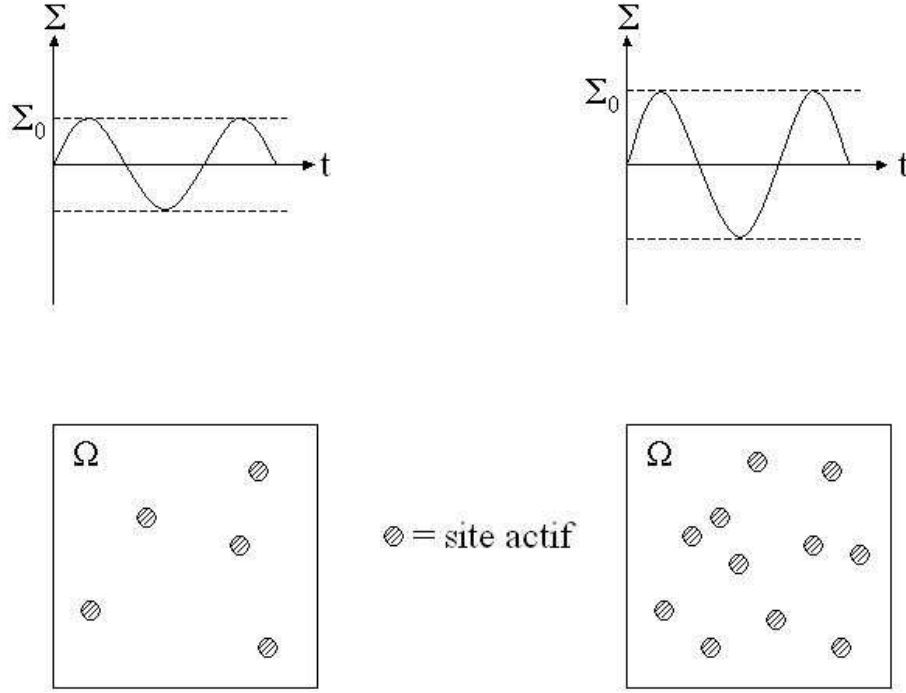


Figure 1-17 : Comportement du modèle à deux échelles.

La probabilité d'avoir  $k$  sites actifs dans un volume  $V$  suit une loi de Poisson :

$$P_k(V) = \frac{(\lambda V)^k}{k!} \exp(-\lambda V) \quad (1-29)$$

On suppose qu'il y a rupture dès lors qu'un site est actif (hypothèse du maillon le plus faible). La probabilité de rupture d'un volume  $V$  sous un chargement d'amplitude  $\Sigma_0$  est équivalente à la probabilité d'avoir au moins un site actif dans  $V$ , ce qui peut se traduire par la relation :

$$P_R = P_{k \geq 1}(V) = 1 - P_{k=0}(V) = 1 - \exp(-\lambda V) \quad (1-30)$$

Si l'on remplace  $\lambda$  par sa définition dans l'équation précédente, on retrouve la loi de Weibull (équation (1-31)).  $\sigma_0$  est donc le facteur d'échelle de Weibull et  $m$  le module de Weibull.

$$P_R = 1 - \exp\left(-\frac{V}{V_0} \left(\frac{\Sigma_0}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (1-31)$$

Lorsque les contraintes ne sont pas homogènes, on transforme l'équation (1-30) de la manière suivante :

$$P_R = 1 - \exp\left(-\int_{\Omega} \lambda dV\right) \quad (1-32)$$

La probabilité de rupture du domaine  $\Omega$  s'écrit alors :

$$P_R = 1 - \exp\left(-\frac{V_{eff}}{V_0} \left(\frac{\Sigma_F}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (1-33)$$

avec  $V_{eff} = V \times H_m$ ,  $H_m = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \left(\frac{\Sigma_0}{\Sigma_F}\right)^m dV$  et  $\Sigma_F = \max_t \Sigma$

$V_{eff}$  est le volume effectif et  $H_m$  représente le facteur d'hétérogénéité des contraintes.

L'identification des paramètres se fait à partir de deux courbes : courbe de Wöhler à 50% et courbe d'échauffement pour définir la fraction volumique d'inclusions qui se déforment plastiquement dans l'éprouvette et qui contribuent donc à l'auto-échauffement du milieu.

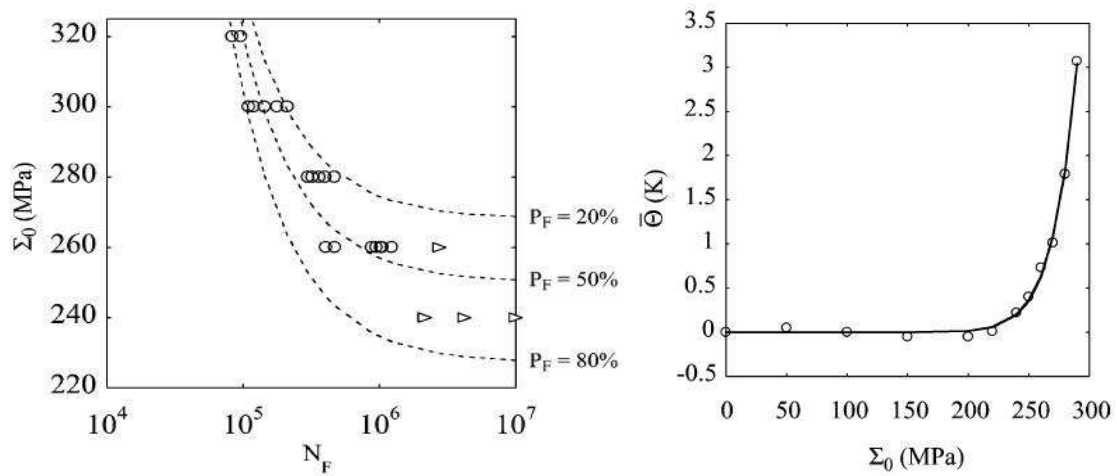


Figure 1-18 : Courbes permettant l'identification du modèle probabiliste à deux échelles

(a) Courbes de Wöhler, (b) Essai d'échauffement [Doudard,2004].

### 1.2.3. Synthèse sur les modèles probabilistes

Nous avons vu deux grandes familles de modèles probabilistes :

- les modèles probabilistes basés sur une approche directe : la taille de défaut intervient explicitement dans le critère, et c'est la distribution de tailles de défauts qui donne son caractère probabiliste au modèle.
- les modèles probabilistes basés sur une approche indirecte : la taille de défaut n'intervient pas explicitement dans le critère. C'est le seuil d'un critère de fatigue multiaxial qui est probabilisé.

Les modèles probabilistes directs s'appuient en général sur la mécanique linéaire de la rupture. A ce titre, ils ne sont valides que pour les grands défauts. Ils présentent l'avantage de faire intervenir directement la population de défauts observée dans le matériau, c'est-à-dire la probabilité de présence des défauts selon leur dimension. A ce titre, ils sont parfaitement adaptés à la description des effets d'échelles. Cependant, de par leur formulation, ils sont difficilement applicables aux cas de chargements multiaxiaux. Le lien avec la durée de vie est ensuite réalisé via un modèle de propagation de fissure par fatigue qui peut tenir compte des effets de gradient autour de la zone d'amorçage à l'aide de formulaires de facteurs d'intensités des contraintes. Mais les durées de vie calculées sont souvent pénalisantes, du fait de la non-prise en compte de la phase de nucléation de la fissure. Pour palier cette difficulté, des modèles de micro-propagation ont été introduits.

Les modèles probabilistes indirects s'appuient sur des critères de fatigue multiaxiaux. Leur domaine de validité est donc celui des très petits défauts. Ces modèles sont bien adaptés aux chargements de fatigue multiaxiaux. Par contre, la difficulté principale réside dans la modélisation des effets d'échelle, associés à la fois à la présence de gradients, à la probabilité de présence des défauts et aux effets de la taille des défauts, dès que ceux-ci ont une taille supérieure à la dimension de transition dans le diagramme de Kitagawa et Takahashi. Pour palier ces difficultés, diverses approches ont néanmoins été proposées, telles que l'introduction d'au moins une échelle supplémentaire (volume d'influence ou bien volume d'inclusion élasto-plastique) et la probabilisation du seuil d'endommagement sur ce volume.

### ***1.3. Modèles de prévision de durées de vie utilisés à SNECMA***

On distingue deux types d'approche pour la prévision des durées de vie en fatigue des pièces critiques à SNECMA :

- **Une approche de type déterministe** basée sur l'utilisation de faisceaux de courbes isoprobables contrainte – durée de vie, établis sur éprouvettes lisses et à déformation imposée.
- **Une approche de type probabiliste** basée sur la théorie du maillon faible et les probabilités de rupture cumulées. Les ruptures par fatigue ont souvent pour origine des défauts initiateurs répartis aléatoirement dans la pièce. La durée de vie calculée est alors la durée de vie en propagation de ces défauts.

Nous allons présenter les différents modèles, déterministes et probabilistes, utilisés par SNECMA. L'objectif est de déterminer quel type d'approche est utilisé, quels sont les points communs et les différences entre les modèles. A partir de cet « état des lieux », nous pourrions alors bâtir le cadre d'un modèle probabiliste unifié.

#### **1.3.1. Modèle de prévision de durée de vie déterministe**

Le modèle de prévision de durée de vie déterministe permet de calculer des durées de vie minimales à partir des **courbes de fatigue oligocycliques**. Il s'applique à tous les matériaux avec un même traitement statistique des données expérimentales.

Le calcul de durée de vie revient à associer à chaque point de la structure la durée de vie d'une **éprouvette lisse subissant un chargement uniaxial équivalent**. Cela implique en amont du calcul de durée de vie un traitement du chargement réel (décomposition en cycles...).

Aucun effet d'échelle n'est pris en compte par cette méthode. Pourtant, les défauts rencontrés dans les pièces sont plus nombreux et peuvent être de plus grande taille que ceux rencontrés dans les éprouvettes lisses. De plus, lorsque certains défauts ont une probabilité de présence très faible, il est peu probable d'en trouver dans le jeu d'éprouvettes lisses utilisé lors de la campagne d'essai. Les courbes de fatigue oligocycliques ainsi établies et utilisées ensuite dans le modèle déterministe occulteront alors complètement ce type de défauts. Pour toutes ces raisons, des modèles probabilistes de prévisions de durées de vie ont été développés.

#### **1.3.2. Modèles de prévision de durée de vie probabilistes**

A l'heure actuelle, une approche spécifique a été développée pour chaque matériau pour lequel des défauts rares peuvent être trouvés dans les composants, et pour lequel les courbes de fatigue oligocycliques établies sur éprouvettes sont insuffisantes pour prévoir le risque de rupture. Ces matériaux sont au nombre de deux :

- Alliages de titane (TA6V)
- Alliages de métallurgie des poudres (N18)

Deux autres modèles probabilistes ont également été mis en place :

- Un modèle probabiliste traitant des compétitions entre mécanismes d'amorçage dans l'Inconel 718. Il ne sera pas développé dans ce paragraphe, son utilité étant de réduire les conservatismes présents dans les courbes de fatigue oligocycliques.
- Un modèle probabiliste traitant des défauts de surface liés à la fabrication et aux opérations de maintenance dans les trous de perçage.

Pour chaque modèle on présentera les raisons qui ont conduit à son développement et on décrira les mécanismes et les sources d'aléa mis en jeu ainsi que le processus et les hypothèses retenues pour appliquer le modèle sur pièce.

#### 1.3.2.1. Modèle probabiliste pour les alliages de titane

Lors de l'élaboration d'un alliage de titane, un composé rigide de Nitrure de Titane (TiN) peut ne pas être éliminé par les différentes opérations d'affinage. Cette ségrégation dénommée **Hard- $\alpha$**  possède une probabilité très faible d'être présente dans une pièce (de l'ordre de  $10^{-9}$ ) mais peut avoir une taille importante. Sous l'action des sollicitations thermomécaniques, elle peut initier une fissure qui se propage plus ou moins vite.

A la suite d'un certain nombre d'incidents imputables à des défauts Hard- $\alpha$  présents dans le matériau (dont celui de Sioux-City en 1989 provoqué par l'éclatement d'un disque Fan d'un DC-10 et qui a fait 111 victimes, cf. Figure 1-19), les autorités de certification américaines ont imposé aux motoristes mondiaux de prendre en compte le risque de rupture lié aux défauts Hard- $\alpha$ .

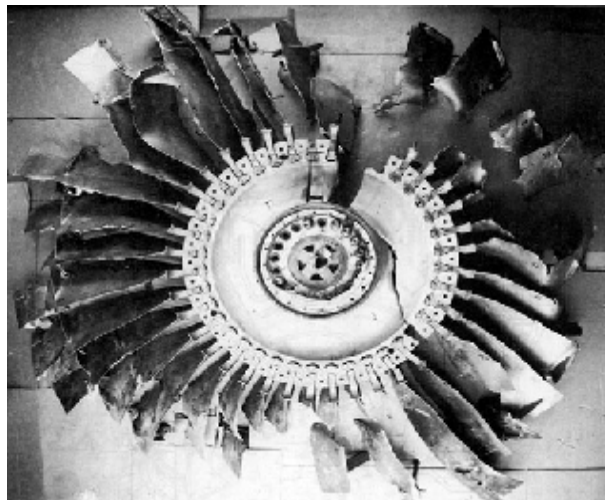


Figure 1-19 : Disque fan de l'accident de Sioux City en 1989

Le problème majeur posé par la présence des Hard- $\alpha$  est qu'ils sont susceptibles d'**atteindre une taille importante sans pouvoir être détectés**. Même s'ils sont extrêmement rares, si un Hard- $\alpha$  est présent dans une zone critique, une rupture très rapide, c'est à dire en moins de 2000 cycles, peut survenir en service. Le seul moyen de l'éviter est de contrôler la pièce périodiquement, avec un pas d'inspection tel qu'on effectue un contrôle avant sa rupture. Par ailleurs leur taux de présence très faible entraîne un effet d'échelle important entre une éprouvette de titane et une pièce réelle (disque) et les méthodes de calcul de durée de vie déterministes ne sont pas adaptées à de tels cas.

Un outil spécifique aux alliages de titane a été développé dont l'objectif est de calculer le risque de rupture associé aux défauts Hard- $\alpha$  dans les disques de turbine en alliage de titane – principalement le TA6V et le Ti17 – pour une durée de vie  $N_0$  donnée.

Les défauts Hard- $\alpha$  ont une taille importante, de l'ordre du millimètre. On fait donc l'hypothèse qu'**un défaut est une fissure amorcée** et la durée de vie associée est une durée de vie en propagation. Le processus de rupture par fatigue mis en jeu pour ce type de matériau est alors le suivant :

- Propagation stable et immédiate (pas de phase d'amorçage dans la durée de vie) de fissure à partir d'un défaut Hard- $\alpha$ .
- Rupture finale de la pièce.

On prendra en compte une **source de dispersion unique, à savoir la probabilité de présence de défauts dans le matériau**. Cette dispersion sera caractérisée par la distribution de tailles de défaut.

La probabilité de rupture d'un volume  $V_i$  de la pièce, soumis à une contrainte  $\sigma_i$ , correspond à la probabilité de trouver un défaut de taille critique qui conduira à la rupture de la pièce pour un nombre de cycle  $N_0$ . Le matériau est décrit par une **courbe de propriété** donnant le nombre de défaut par unité de volume dont la taille est supérieure à une taille donnée. Connaissant cette distribution de défauts, on peut donc déterminer le nombre de défauts de taille critique par unité de volume. Le risque de rupture global de la pièce est alors calculé sous couvert de **l'hypothèse du maillon le plus faible** : la probabilité de survie de la pièce est égale au produit de probabilité de survie de chacun des volumes  $V_i$  de la pièce.

Ce modèle permet par ailleurs de prendre en compte l'effet bénéfique d'une inspection en service sur le risque de rupture de la pièce. Il suffit en effet de modifier la courbe de propriété du matériau de façon à prendre en compte l'évolution de la population de défauts du matériau au cours des cycles.

Ce modèle est clairement un modèle probabiliste de type approche directe basé sur la mécanique linéaire de la rupture. La distribution de tailles de défauts est une donnée d'entrée du modèle. Elle provient de mesures expérimentales collectées auprès de tous les motoristes aéronautique (il s'agit donc de courbes point par point). Le calcul de la probabilité de rupture se fait de façon analytique. Les défauts sont grands au regard de la microstructure, les hypothèses de la mécanique linéaire élastique de la rupture sont donc respectées et l'on peut sans problème considérer le défaut comme une fissure amorcée.

### 1.3.2.2. Modèle probabiliste pour les superalliages base Nickel de métallurgie des poudres

L'utilisation de la métallurgie des poudres pour les superalliages base Nickel permet d'améliorer les propriétés mécaniques de ces matériaux. Cela a pour conséquence leur utilisation à des niveaux de chargement et de température plus élevés que les alliages conventionnels. Leur procédé d'élaboration et le fort niveau de sollicitation conduit à des sites d'amorçages spécifiques à la métallurgie des poudres.

On constate dans l'alliage N18 une dispersion expérimentale des durées de vie liée d'une part à la nature du site d'amorçage (grain, porosité ou inclusion) et d'autre part à la probabilité de présence d'un site dans la pièce. Parmi les trois sites d'amorçage répertoriés, seules les inclusions présentent un phénomène d'effet d'échelle entre une éprouvette et une pièce

moteur. Un outil spécifique au calcul de prédiction de durée de vie de l'alliage N18 a donc été mis au point pour tenir compte du risque de rupture lié à la présence d'inclusions dans le matériau.

Le modèle probabiliste développé permet de calculer la durée de vie associée à une probabilité de rupture de  $10^{-3}$  des pièces en alliage N18.

Les inclusions sont assimilées à des fissures, dont la forme (circulaire ou semi-circulaire) dépend de la position de l'inclusion (en surface ou interne). Le processus de rupture par fatigue mis en jeu pour ce type de matériau est alors le suivant :

- Phase d'amorçage et de propagation de fissure courte.
- Phase de propagation de fissure longue.
- Rupture finale de la pièce.

On distinguera dans les mécanismes les amorçages en surface des amorçages en volume.

On prendra en compte **deux sources de dispersion** :

- La probabilité de présence d'une inclusion.
- Une dispersion sur la durée de vie calculée en propagation.

L'objectif du modèle est de calculer une probabilité de rupture associée à une durée de vie, et d'itérer sur les durées de vie de façon à trouver pour quel nombre de cycles la probabilité de rupture est égale à  $10^{-3}$ .

Dans un premier temps, on cherche à déterminer une courbe de durée de vie en fonction de la taille d'inclusion :

- Pour une **inclusion en surface**, la durée de vie est tout d'abord calculée en propagation avec une loi de propagation de type Paris pour fissures longues. La durée de vie obtenue est alors corrigée par deux paramètres de façon à prendre en compte la phase d'amorçage et d'être cohérent avec les résultats expérimentaux.
- Pour une **inclusion en volume**, on tient compte de la phase d'amorçage en utilisant en premier lieu une loi de propagation pour fissures courtes. Lorsque l'on atteint un facteur d'intensité des contraintes seuil, on passe alors à une loi de propagation pour fissures longues.

La courbe de durée de vie ainsi obtenue est une courbe moyenne. On constate une dispersion des résultats expérimentaux autour de cette courbe. Ce phénomène est modélisé par une **dispersion log-normale** autour de la durée de vie moyenne, qui permet donc de calculer une probabilité de rupture avant une durée de vie donnée en fonction de la taille d'inclusion.

Par ailleurs, le matériau est décrit par une **courbe de propreté** donnant le nombre de défaut par unité de volume dont la taille est supérieure à une taille donnée.

La probabilité de rupture d'un volume  $V_i$  de la pièce, soumis à une contrainte  $\sigma_i$ , est donc la probabilité d'une part de trouver un défaut de taille  $d_i$  dans ce volume et d'autre part que ce défaut mène à la rupture. La probabilité de rupture globale de la pièce est calculée avec **l'hypothèse du maillon le plus faible**.

Ce modèle est aussi un modèle probabiliste de type approche directe basé sur la mécanique linéaire de la rupture. La distribution de tailles de défauts est une donnée d'entrée du modèle, il s'agit d'une loi double-exponentielle, identifiée expérimentalement. Le calcul de la probabilité de rupture se fait de façon analytique. Les inclusions étant du même ordre de

grandeur que la microstructure, une durée de vie calculée uniquement en propagation donne lieu à des conservatismes beaucoup trop importants. Une probabilité d'amorçage est donc prise en compte en plus dans le modèle.

### 1.3.2.3. Modèle probabiliste pour les défauts de surface

Le modèle probabiliste permettant de prendre en compte le risque de rupture sur les défauts surfaciques de maintenance et fabrication dans les trous de perçage a été développé suite à l'accident de Pensacola en Floride (Figure 1-4). On s'est alors aperçu que des défauts de ce type pouvaient mener à des ruptures catastrophiques dans des zones fortement contraintes.

Le calcul de la probabilité de rupture est effectué à partir d'une **simulation de Monte Carlo**. La vie en service de la pièce est simulée : apparition d'un défaut de surface, propagation, inspection de la pièce, détection ou non du défaut... Les variables aléatoires suivantes sont définies :

- la taille de défaut
- les dates d'inspection
- la probabilité de détecter un défaut de taille donnée

Un tirage aléatoire de ces variables, combiné à une loi de propagation de fissure (adaptée au cas des défauts situés dans les trous de perçage) permet de simuler la vie de la pièce et de déterminer pour un défaut donné s'il y aura rupture avant la durée de vie de la pièce et, si c'est le cas, si une inspection détectera ce défaut avant la rupture. Si l'on nomme échec le nombre de simulations pour lesquelles on a rupture de la pièce, le risque de rupture est alors le nombre d'échecs sur le nombre total de simulations réalisées.

Encore une fois il s'agit d'un modèle probabiliste d'approche directe. Les défauts sont modélisés par des fissures amorcées, semi-elliptiques ou quart-elliptiques selon leur position dans le perçage. Le caractère probabiliste de ce modèle est lié d'une part à la présence aléatoire de défauts, et d'autre part à la probabilité de détecter ces défauts lors d'une inspection.

### 1.3.3. Bases d'un modèle probabiliste unifié

Les trois modèles présentés ci-dessus ont en commun d'être des modèles probabilistes d'approche directe. Les défauts présents dans le matériau – de natures diverses en fonction du matériau – sont tous représentés par une **courbe de propriété**, c'est-à-dire une distribution de leur taille dans un volume donné établie expérimentalement. Les modèles d'approche directe présentent donc l'avantage de pouvoir prendre en compte ce type de données.

Ainsi pour chacun des trois modèles, les défauts sont assimilés à des fissures, et la durée de vie à rupture est calculée à partir d'un modèle de propagation (le même pour les trois modèles). Cependant, de par la nature différente des défauts rencontrés, cette hypothèse est plus ou moins adaptée. Ainsi, pour les alliages de Titane, ce niveau de modélisation est suffisant pour obtenir de bons résultats, mais pour les alliages élaborés par métallurgie des poudres, compte tenu de la taille des inclusions, l'hypothèse d'assimiler les défauts à des fissures longues est beaucoup trop conservatrice. Une correction pour prendre en compte une phase d'amorçage dans le phénomène de fatigue est alors nécessaire. Cela met en avant la



nécessité pour le modèle probabiliste de pouvoir **s'adapter à une large gamme de tailles de défauts**.

Par ailleurs, on constate qu'actuellement les modèles probabilistes utilisés simplifient au maximum le traitement du chargement. Seule la composante principale maximale est prise en compte, et seulement à un instant critique du cycle. Il apparaît nécessaire de faire évoluer cette pratique et de développer un critère apte à traiter les **chargements multiaxiaux**. Il faudra donc trouver un moyen de bénéficier des avantages des modèles probabilistes d'approche indirecte dont la formulation est adaptée à ce type de chargement. De plus, il semble souhaitable de ne plus décomposer la pièce de façon « grossière », mais de traiter de façon plus fine les diverses zones de la pièce pour ne pas risquer de sous-évaluer le risque de rupture par des moyennes abusives et aussi pour représenter de façon correcte les gradients de contrainte qui jouent un rôle important dans le phénomène de fatigue.

Au vu des différents modèles probabilistes existants à SNECMA, les **fonctionnalités** qu'un tel outil doit posséder à minima sont les suivantes :

- Possibilité de fournir soit une durée de vie pour une probabilité de rupture donnée, soit une probabilité de rupture pour une durée de vie donnée.
- Prise en compte d'éventuelles inspections (avec des dates probabilistes).
- Couverture de toute la gamme de probabilité : de  $10^{-9}$  à 1.
- Prise en compte de tous les mécanismes du phénomène de fatigue et de la compétition entre ces différents mécanismes.
- Prise en compte de tous les défauts et de la compétition entre les différents défauts.
- Prise en compte de la compétition entre les différentes zones des pièces.

La **source d'aléa** principale du modèle probabiliste est la probabilité de présence de défauts dans le matériau. A cela, on ajoutera la prise en compte de l'hétérogénéité des propriétés mécaniques locales à l'échelle de la microstructure. En effet on a précisé que le modèle probabiliste devait s'adapter à la gamme de défaut la plus large possible, c'est-à-dire aussi bien aux petits défauts, d'une taille équivalente aux dimensions microstructurales, qu'aux grands défauts. Or, on a vu que pour les petits défauts, il y avait une forte interaction entre la microstructure et l'endommagement de fatigue (franchissement des barrières microstructurales...). Ainsi la variabilité du chargement local semble être une source d'aléa importante pour les très petits défauts.

Les **mécanismes physiques** considérés sont au nombre de deux : la propagation de la fissure jusqu'à la rupture, et dans certains cas (petits défauts) une phase d'amorçage de fissure non négligeable dans la durée de vie calculée.

Le schéma général d'un outil de prédiction de durées de vie probabilistes répondant aux spécifications énoncées précédemment est présenté Figure 1-20. Il est construit de manière à être le plus évolutif possible : une source de dispersion ou un mécanisme doit pouvoir être ajouté sans modifier fondamentalement la structure de l'outil.

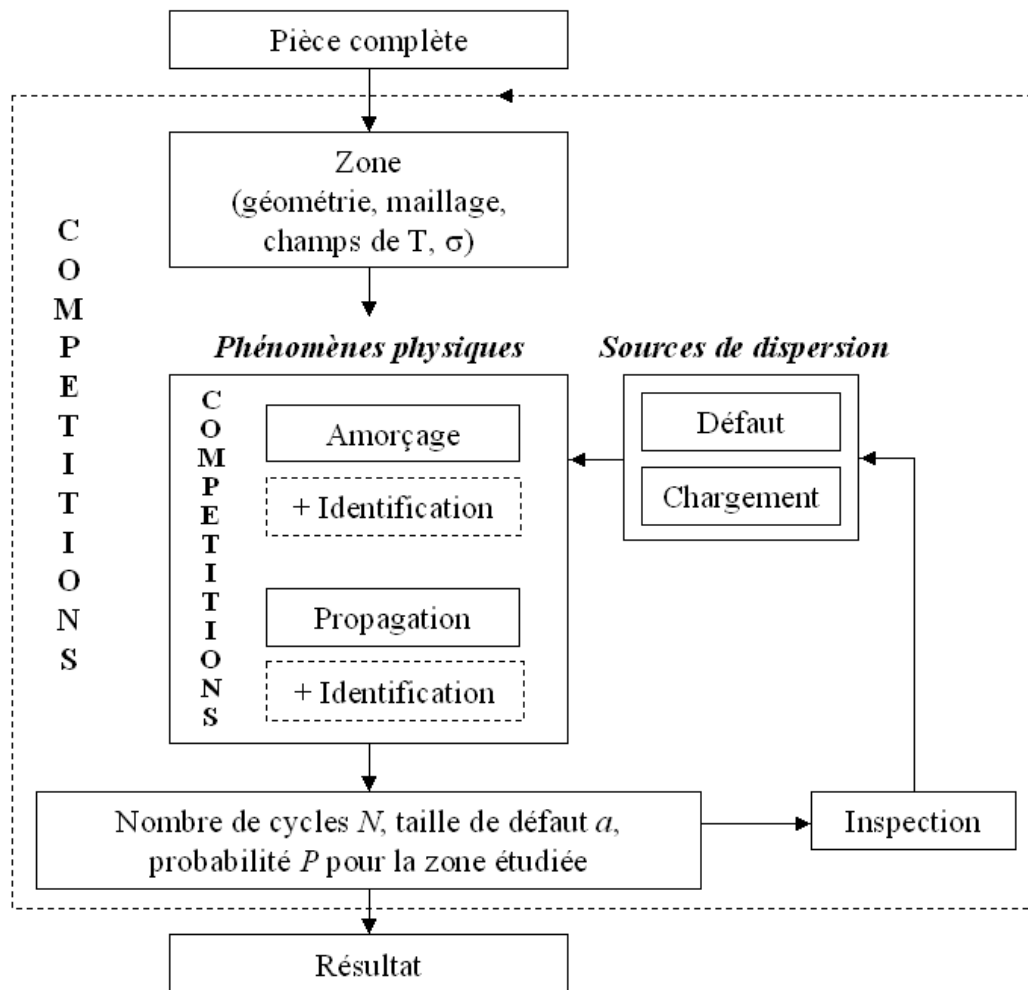


Figure 1-20 : Organigramme général d'un outil probabiliste unifié.

#### **1.3.4. Synthèse sur les modèles probabilistes SNECMA**

**Les contraintes industrielles (évolution des méthodes d'élaboration des matériaux, évolution des réglementations...) ont conduit SNECMA à développer différents modèles probabilistes en complément de leur approche déterministe de prévision de durée de vie en fatigue. Chaque modèle a été établi pour un matériau spécifique. Cependant, une étude de ces différentes approches a montré qu'elles présentaient de nombreuses similitudes, qui méritaient d'être exploitées.**

**Ainsi en se basant d'une part sur les mécanismes physiques d'initiation de fissures de fatigue sur défauts, et d'autre part sur les besoins industriels mis à jour dans les modèles, le cadre général d'un outil probabiliste unifié a pu être mis en place.**

**Les sources de dispersion seront au nombre de deux : dans un premier temps la distribution aléatoire des défauts dans le matériau, et dans un deuxième temps la variabilité des propriétés mécaniques locales, pour tenir compte de l'interaction des petits défauts avec la microstructure.**

**Les défauts, à l'origine de la dispersion des durées de vie en fatigue, sont modélisés par des fissures et pris en compte via une courbe de propreté qui décrit leur distribution dans un volume de matériau à partir de données expérimentales. Les modèles directs basés sur la mécanique linéaire de la rupture sont bien adaptés à cette problématique. Cependant, les chargements à considérer sont souvent multiaxiaux, or le traitement de ce type de chargement est l'apanage des modèles d'endurance. Le modèle probabiliste unifié devra donc être construit de manière à pouvoir bénéficier des points forts des deux approches.**

## **2. CRITERE MULTIAXIAL DE FATIGUE PRENANT EN COMPTE LA TAILLE, LA FORME ET LA POSITION DES DEFAUTS**

Les différents modèles probabilistes employés à SNECMA concernent des matériaux pour lesquels les mécanismes d'amorçage et de propagation des défauts diffèrent, mais surtout pour lesquels les tailles moyennes des populations de défauts sont très différentes (relativement à la microstructure). Dans l'optique d'unifier les démarches pour toutes les applications, un critère de fatigue qui s'applique à une large gamme de dimension de défauts doit être mis en place. Or, comme on le précisera au paragraphe 2.1.2, la limite d'endurance est sensible ou non à la dimension des défauts selon qu'ils sont grands ou petits au regard de la microstructure. Cet effet a été mis en évidence par Kitagawa et Takahashi (paragraphe 2.1.2) et permet de distinguer deux gammes de dimensions de défauts, qui correspondent à deux démarches bien différentes de dimensionnement en fatigue.

Une hypothèse couramment adoptée, notamment dans les modèles utilisés à SNECMA, est d'assimiler les défauts à des fissures, et de calculer leur durée de vie en propagation, en se basant sur la mécanique linéaire de la rupture. Une telle approche fait intervenir de manière explicite la taille du défaut. Il est donc simple d'introduire une distribution de tailles de défauts et, par conséquent, un caractère probabiliste au modèle ainsi que les effets d'échelle qui y sont associés. Cependant, cette démarche ne s'applique bien que pour des défauts de dimension importante.

Les modèles d'endurance, formulés en contrainte, en déformation ou en énergie, ont quant à eux été développés pour permettre de prendre en compte, selon les cas, des chargements uniaxiaux, multiaxiaux, proportionnels ou non-proportionnels, afin de déterminer si oui ou non ces chargements conduiront à l'initiation de fissures en service. Aussi s'appliquent-ils au matériau « sain », contenant uniquement de très petits défauts inhérents au matériau et dont la probabilité de présence est donc très élevée. Aucun paramètre géométrique associé aux défauts n'apparaît explicitement dans ces modèles. Il est par conséquent assez difficile de tenir compte des courbes de propreté du matériau avec ce type de modèles.

Ces deux approches présentent par ailleurs l'inconvénient de ne pas être applicables quelle que soit la taille de défaut. La mécanique linéaire de la rupture n'est valide qu'au-delà d'une dimension de fissure suffisamment grande tandis que les approches en contraintes concernent les très petits défauts. Un problème se pose donc lorsque les populations de défauts s'étalent sur les deux domaines (inclusions de céramiques dans le superalliage N18) ou que deux populations de défauts sont en compétition (grands défauts peu probables et petits défauts très probables) dans un même matériau.

L'objectif de cette étude est de mettre en place un critère qui soit applicable sur une gamme la plus large possible de dimension de défauts. En outre, on aimerait capitaliser d'une part les avantages de la mécanique linéaire de la rupture et d'autre part ceux des approches en contrainte.

## 2.1. Bibliographie

L'objectif de ce chapitre est de présenter la mise en œuvre d'un critère de fatigue multiaxiale prenant en compte l'effet de la dimension des défauts sur la limite d'endurance. Le formalisme de ce critère se base sur la mécanique linéaire de la rupture en incluant la contrainte  $T$  dans l'expression des champs de la mécanique linéaire de la rupture. Nous présentons dans ce paragraphe une bibliographie succincte sur les différentes notions mises en jeu dans cette étude. On rappellera en premier lieu les types de critères de fatigue existants, leurs champs d'application et leurs limites. L'effet de taille de défaut que l'on souhaite représenter sera développé par la suite. On conclura sur la notion de contrainte  $T$ , sa définition et ce qu'elle permet d'introduire dans un modèle de mécanique linéaire de la rupture.

### 2.1.1. Critères de fatigue

Un critère de fatigue permet de statuer sur le dépassement ou non de la limite d'endurance – ou plus généralement la limite de fatigue à  $N$  cycles – du matériau soumis à un cycle de contraintes multiaxiales. Il s'agit donc d'exprimer le seuil séparant les conditions permettant à la structure de rester saine ou de se fissurer par fatigue en fonction de grandeurs extraites de l'évolution du tenseur des contraintes – choisies comme étant représentatives du phénomène de fatigue – et de différents paramètres caractéristiques du matériau.

Lorsque le matériau ne contient pas déjà une fissure, la plasticité joue un rôle important au niveau de l'amorçage. Dans les matériaux cubiques à faces centrées, par exemple, les fissures de fatigue s'amorcent au niveau des bandes de glissement persistantes et dans les plans cristallins sur lesquels la scission résolue est maximale [Socie,1993]. La contrainte normale à ce plan joue également un rôle important car lorsqu'elle est compressive, elle s'oppose à la propagation des fissures, en mode I (contact unilatéral) comme en mode mixte (frottement de Coulomb). Il semble donc naturel de faire intervenir le **cisaillement maximal**  $\tau_{\max}$  et la **composante normale au plan de cisaillement maximum**  $N$  dans le formalisme d'un critère de fatigue multiaxial. Cependant, comme les fissures peuvent bifurquer, la contrainte normale au plan de propagation de la fissure n'est pas nécessairement égale à la contrainte normale au plan de cisaillement maximum dans lequel la fissure s'amorce. C'est pourquoi on préfère généralement formuler le critère en fonction de la **pression hydrostatique**, invariante par rotation du plan de propagation.

Par ailleurs, pour des chargements uniaxiaux, de nombreux essais ont montré l'influence – ou au contraire la neutralité – des paramètres suivants sur la limite de fatigue :

- Le *cisaillement moyen* :

Lors d'essais de fatigue en cisaillement, le cisaillement moyen au cours du cycle de fatigue n'intervient pas sur la limite de fatigue en torsion. Seule l'amplitude du cisaillement intervient [Sines,1959].

- La *contrainte moyenne*:

En revanche, au cours d'essais de fatigue en traction, une contrainte moyenne de traction au cours du cycle diminue significativement la résistance en fatigue par comparaison avec une sollicitation de même amplitude mais présentant une contrainte moyenne de compression au cours du cycle [Goodman,1899] [Gough et al.,1951].

On peut classer les critères de fatigue multiaxiale selon trois catégories :

- Les critères de fatigue uniaxiale
- Les critères de fatigue multiaxiale et proportionnelle
- Les critères de type plan critique

Ces critères se différencient par l'approche utilisée pour établir la fonction de fatigue représentative de l'endommagement de la structure. Pour chaque catégorie, on distinguera aussi les critères qui emploient une **approche macroscopique** de ceux qui s'appuient sur une **approche mésoscopique** avec changement d'échelle. Les fissures s'initiant à l'échelle du grain, certains auteurs choisissent en effet de considérer le tenseur local des contraintes dans leur critère afin de tenir compte du fait qu'un grain peut plastifier (et donc une fissure s'initier) alors que macroscopiquement le matériau reste dans son domaine d'élasticité.

### 2.1.1.1. Critères de fatigue uniaxiaux

Les **critères de fatigue uniaxiaux** ont été établis à partir de résultats expérimentaux obtenus lors d'essais uniaxiaux (généralement traction ou flexion alternée ou des essais de torsion alternée). Les nombreux essais qui ont été mis en œuvre par le passé ont permis de mettre en évidence les paramètres influents dans le phénomène de fatigue, en particulier la sensibilité à l'amplitude du cisaillement en torsion d'une part et à la contrainte moyenne de traction d'autre part.

Différentes lois empiriques décrivent l'influence de la contrainte moyenne  $\sigma_{moy}$  sur la limite de fatigue du matériau, à savoir le nombre de cycles à rupture pour une probabilité de rupture donnée (en général 50%). Lorsque la contrainte moyenne  $\sigma_{moy}$  augmente, l'amplitude de la contrainte cyclique admissible  $\sigma_a$  diminue. Différentes lois empiriques décrivent ce phénomène. Elles prennent la forme de droites, d'ellipses et de paraboles dans le plan  $(\sigma_{moy}, \sigma_a)$ , appelé diagramme de Haigh (Figure 2-1) :

$$\text{Droite de Söderberg [Söderberg,1930]} : \frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{moy}}{R_e} = 1 \quad (2-1)$$

$$\text{Droite de Goodman [Goodman,1899]} : \frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{moy}}{R_m} = 1 \quad (2-2)$$

$$\text{Parabole de Gerber [Gerber,1874]} : \frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \left( \frac{\sigma_{moy}}{R_m} \right)^2 = 1 \quad (2-3)$$

$$\text{Ellipse de Marin [Marin,1956]} : \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_D} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{moy}}{R_m} \right)^2 = 1 \quad (2-4)$$

$\sigma_D$ ,  $R_e$ , et  $R_m$  désignent respectivement la limite de fatigue en traction alternée symétrique, la limite d'élasticité et la résistance maximale en traction.

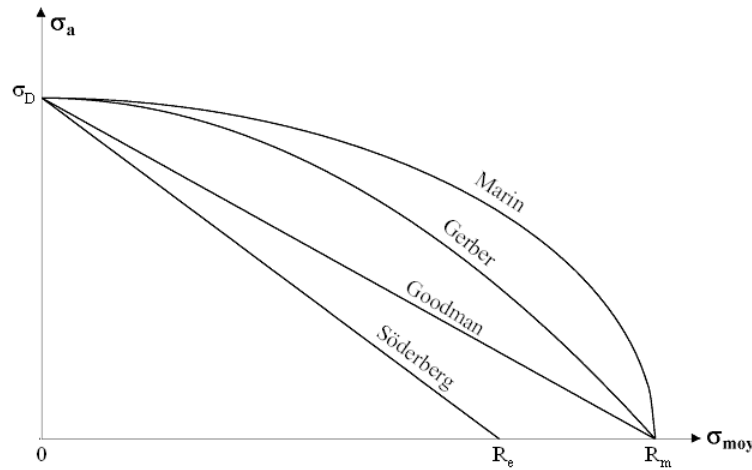


Figure 2-1 : Diagramme de Haigh.

Leur formalisme est fortement dépendant des contraintes rencontrées expérimentalement, ces critères sont donc difficilement applicables à des chargements multiaxiaux quelconques et à des géométries complexes (différentes de celles des éprouvettes).

#### 2.1.1.2. Critères de fatigue multiaxiale proportionnelle.

La formulation des **critères de fatigue multiaxiale proportionnelle** se base sur les invariants du tenseur des contraintes ou de son déviateur ou encore sur un concept énergétique. Ils sont bien adaptés au cas où l'endommagement se répartit de manière équivalente sur l'ensemble des plans ou bien au cas des chargements proportionnels pour lesquels le problème du choix d'un plan critique ne se pose pas.

On prendra comme exemple de critère de fatigue multiaxiale proportionnelle le **critère de Crossland** [Crossland,1956] :

Ce critère a été élaboré suite à une campagne d'essais qui a mis en évidence l'importance de la pression hydrostatique pour le phénomène de fatigue. Un des paramètres du critère est alors la contrainte hydrostatique maximale  $\sigma_{H\max}$ . Le critère fait aussi appel à l'amplitude du second invariant du tenseur déviateur des contraintes  $J_{2a}$ . Si l'on note  $\underline{s}$  le tenseur déviateur des contraintes, l'amplitude du second invariant de ce tenseur  $J_{2a}$  se calcule de la manière suivante :

$$\sqrt{J_{2a}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \max_{t_1} \left( \max_{t_2} \sqrt{(\underline{s}(t_1) - \underline{s}(t_2)) : (\underline{s}(t_1) - \underline{s}(t_2))} \right) \quad (2-5)$$

Le critère de Crossland s'exprime alors par la relation suivante :

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha \sigma_{H\max} \leq \beta \quad (2-6)$$

Les deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont identifiées à partir des limites d'endurance expérimentales sur éprouvettes lisses en torsion  $\tau_D$  et en traction  $\sigma_D$  alternées symétriques et s'écrivent :

$$\alpha = \frac{3\tau_D}{\sigma_D} - \sqrt{3} \quad , \quad \beta = \tau_D \quad (2-7)$$

Le critère est valable si la condition ( $\alpha > 0$ ) est vérifiée, afin de traduire l'effet négatif d'une pression hydrostatique positive sur la tenue en fatigue du matériau. En torsion cyclique, la valeur du critère est indépendante de la valeur moyenne du cisaillement et dépend seulement de son amplitude. En traction cyclique, le critère se représente bien par une droite dans le diagramme de Haigh.

Les travaux de Nadot [Nadot et al., 2006] ont montré que l'amplitude de la contrainte de cisaillement ainsi que la contrainte hydrostatique maximale étaient des paramètres représentatifs du phénomène de fatigue pour un matériau sain mais aussi pour un matériau contenant des défauts. Ces défauts sont alors modélisés par le gradient de contrainte hydrostatique sur une taille caractéristique de la taille de défaut (une approche locale au point le plus contraint en périphérie de défaut donnant de mauvais résultats). L'expression du critère de Crossland est alors modifiée de la manière suivante :

$$\sqrt{J_{2a}} + \alpha \sigma_{H \max} \left( 1 - a \frac{G}{\sigma_{H \max}} \right) \leq \beta \quad (2-8)$$

Où  $a$  est un paramètre matériau de la dimension d'une longueur et  $G$  est le gradient de contrainte s'exprimant par :

$$G = \frac{\sigma_{H \max}(0) - \sigma_{H \max}(\sqrt{area})}{\sqrt{area}} \quad (2-9)$$

Avec  $\sqrt{area}$  le paramètre de Murakami [Murakami et al., 1986].

L'identification du critère requiert une courbe contrainte-déformation cyclique élasto-plastique, pour déterminer le gradient de contraintes. Ce critère a été testé pour des chargements de traction, torsion et des combinaisons traction-torsion, pour différents défauts. Les résultats obtenus sont bons (moins de 15% d'erreur dans la plupart des cas). On note cependant que le critère n'est valide que pour des défauts suffisamment grands. En-dessous d'une certaine dimension, le défaut n'a pas d'influence notable sur la limite de fatigue, et les lois élasto-plastiques utilisées pour calculer le gradient de contrainte hydrostatique ne sont plus applicables pour calculer les distributions de contraintes microscopiques autour du défaut.

Par ailleurs, les critères fondés sur des invariants (du tenseur des contraintes ou des déformations) sont **inadaptés pour des chargements non proportionnels**. Prenons par exemple une sollicitation de traction-torsion hors phase telle que le tenseur des contraintes appliquées  $\underline{\underline{\sigma}}$  ait la forme suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma = \sigma_a \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\sigma_a}{\sqrt{3}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2-10)$$



Dans ce cas, le second invariant du tenseur déviateur des contraintes est constant au cours du temps et son amplitude est nulle. Pourtant, on peut trouver un plan particulier pour lequel l'amplitude de la contrainte de cisaillement n'est pas nulle au cours du cycle. C'est pourquoi, une approche fondée sur les invariants n'est pas adaptée en fatigue multiaxiale non-proportionnelle.

### 2.1.1.3. Critères de type plan critique

Les **critères de type plan critique** reposent sur l'hypothèse que l'endommagement est localisé sur un plan dit critique. Ce plan est déterminé via des paramètres issus du tenseur des contraintes, ce qui est le cas, par exemple, pour le critère de Dang Van [Dang Van,1973], mais peut également combiner des composantes du tenseur des contraintes et de celui des déformations, comme pour les critères de Fatemi et Socie [Fatemi et al.,1988] ou de Smith et Watson [Smith et al.,1970].

Dans la bibliographie, on distingue deux manières de déterminer le plan critique :

- Une première approche consiste à choisir le plan critique à l'aide d'un premier critère puis à calculer ensuite, sur ce plan critique, la valeur d'un indicateur de l'endommagement de fatigue.
- La deuxième approche utilise un seul critère, l'indicateur d'endommagement par plan. Le plan critique est celui qui maximise l'indicateur.

Prenons par exemple le **critère de Fatemi, Socie et Kurath** ou FSK [Fatemi et al.,1988]. L'indicateur de l'endommagement par cycle en fatigue sur ce plan est choisi comme suit :

$$I_{FSK} = \Delta\gamma \left( 1 + k \frac{N_{\max}}{R_e} \right) \quad (2-11)$$

Où  $\Delta\gamma$  désigne l'amplitude de la déformation de cisaillement maximale au cours du cycle,  $N_{\max}$  est la contrainte normale maximale au plan choisi,  $R_e$  est la limite d'élasticité, et  $k$  est un paramètre matériau à ajuster. On peut soit choisir le plan qui maximise  $\Delta\gamma$ , puis calculer l'indicateur  $I_{FSK}$  sur ce plan, soit déterminer directement le plan qui maximise l'indicateur  $I_{FSK}$ . La première solution est en accord avec l'enchaînement des mécanismes. A savoir un amorçage de fissure sur un plan qui maximise  $\Delta\gamma$  puis une propagation de fissure assistée par  $N_{\max}$ . La seconde solution permet d'éviter de sélectionner un plan qui subirait une amplitude de cisaillement importante mais soumis à une contrainte normale de compression.

On peut citer également le **critère de Smith, Watson et Topper** ou SWT [Smith et al.,1970], pour lequel l'indicateur d'endommagement s'écrit comme suit :

$$I_{SWT} = \Delta\epsilon_N N_{\max} \quad (2-12)$$

Où  $\Delta\epsilon_N$  est l'amplitude de la déformation normale au plan choisi, et où  $N_{\max}$  est la contrainte normale maximale à ce même plan. Le plan critique est le plan qui maximise l'indicateur  $I_{SWT}$ .

De même, le **critère de Dang Van** [Dang Van,1973] est un critère de type plan critique mais fondé sur une approche mésoscopique. Ce critère s'applique aux matériaux polycristallins sollicités dans le domaine de l'endurance. On suppose que le comportement macroscopique est élastique mais qu'une déformation plastique localisée peut se produire dans la structure. On peut alors montrer que le comportement mésoscopique du matériau doit atteindre un état adapté [Hill,1967] [Mandel,1971]. Le critère repose sur deux paramètres définis à partir de l'état mésoscopique adapté: d'une part le cisaillement local en régime adapté  $\tau(t, \underline{n})$  et d'autre part la pression hydrostatique mésoscopique  $\sigma_H(t)$ .

L'expression de l'indicateur d'endommagement  $I_{DV}$  par plan de normale  $\underline{n}$  est la suivante :

$$I_{DV} = \max_t \left\{ \frac{\tau(t, \underline{n}) + \alpha \sigma_H(t)}{\beta} \right\} \quad (2-13)$$

Le plan critique est le plan qui maximise l'indicateur d'endommagement  $I_{DV}$ . En fonction du trajet de chargement, on peut prévoir la tenue en fatigue de la structure. Tant que le trajet de chargement reste en deçà du seuil d'endurance prévu par le critère de Dang Van dans le plan  $(\sigma_H, \tau)$ , il n'y aura pas fissuration par fatigue de la structure (Figure 2-2). On peut également étendre le critère à l'endurance limitée en associant une durée de vie à chaque valeur de l'indicateur d'endommagement.

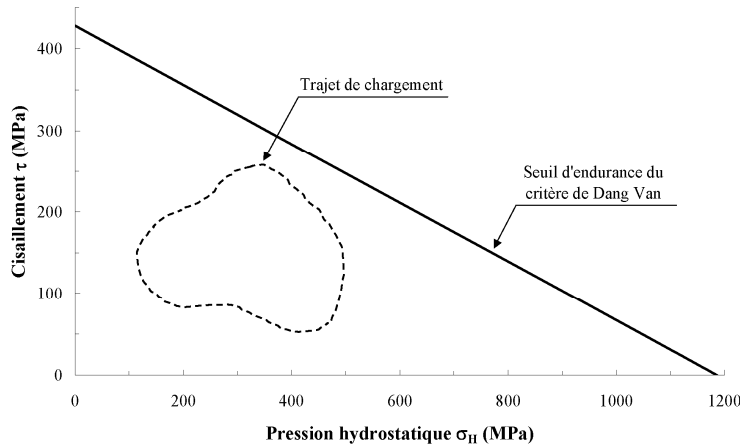


Figure 2-2 : Représentation du seuil du critère de Dang Van dans le plan  $(\sigma_H, \tau)$  pour l'acier 30NCD16.

Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  du critère peuvent être identifiées à partir des limites d'endurance expérimentales sur éprouvettes lisses en torsion  $\tau_D$  et en flexion  $f_D$  alternées symétriques (par exemple) et s'écrivent :

$$\alpha = 3 \left( \frac{\tau_D}{f_D} - \frac{1}{2} \right) , \quad \beta = \tau_D \quad (2-14)$$

Une des difficultés principales de ces approches réside dans la détermination du plan critique. Imaginons par exemple un chargement qui se décompose en un million de cycles de torsion d'amplitude moyenne et un unique cycle de traction de plus forte amplitude. Le plan critique sera alors défini en fonction de l'unique cycle de traction. Ainsi, si le dommage se distribue au cours du temps sur divers « plans », les approches de type plan critique pourront se révéler inadaptées. Un critère défini sur une moyenne quadratique de l'endommagement par plan pourra alors être défini.

#### 2.1.1.4. Synthèse sur les critères de fatigue

Les critères empiriques sont limités à des applications restreintes au type de chargement et de matériau pour lesquels ils ont été formulés. Ils ne sont donc pas applicables pour des chargements multiaxiaux quelconques. Ils présentent néanmoins l'intérêt de fournir une base expérimentale qui a permis de mettre en évidence des résultats importants en fatigue.

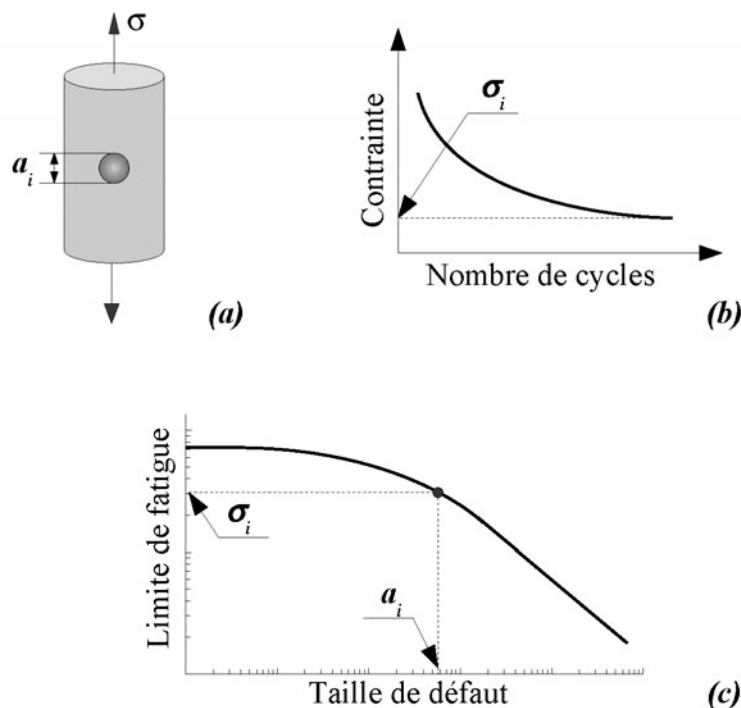
Les critères de fatigue multiaxiale proportionnelle peuvent s'avérer complexes de par les grandeurs qu'ils font intervenir. En pratique, ces critères donnent de bons résultats pour les chargements proportionnels mais ne sont pas adaptés au cas des chargements hors-phase. De plus, comme aucun plan n'est spécifié, ces critères permettent de prévoir l'amorçage d'une fissure de fatigue, mais en aucun cas son orientation.

Les critères de type plan critique sont en accord avec l'enchaînement des mécanismes de fatigue. L'orientation de la fissure de fatigue initiée correspond à l'orientation du plan critique choisi. La détermination de ce plan critique n'est cependant pas toujours évidente. Elle passe par la maximisation d'une composante du tenseur des contraintes ou encore par la maximisation d'un indicateur d'endommagement (combinaison de plusieurs composantes du tenseur des contraintes). Le plan critique est identifié pour le cycle le plus pénalisant du chargement, qu'il soit réellement représentatif du chargement appliqué ou au contraire qu'il n'intervienne qu'une seule fois. Les critères de type plan critique permettent de prendre en compte des chargements non-proportionnels. Le choix d'un plan critique donne accès à une information sur l'orientation de la fissure de fatigue initiée. On peut alors compléter le modèle d'amorçage par un modèle de propagation de fissure.

Par ailleurs, quelle que soit la catégorie à laquelle ils appartiennent, les critères de fatigue présentés sont des critères déterministes : on établit s'il y a fissuration ou non, mais on ne quantifie pas le risque de fissuration. Pour un trajet de charge donné on détermine s'il y a rupture de la structure. La plupart des critères de fatigue se représentent dans un plan (le plan défini par les paramètres choisis par l'auteur du critère comme représentatifs du phénomène de fatigue) et les domaines de rupture et non-rupture sont délimités par une courbe simple (souvent une droite) : tant que le trajet de charge reste en deçà de cette courbe il n'y a pas rupture de la structure (Figure 2-2). Lorsque l'on se place dans le domaine de l'endurance limitée sur une courbe de Wöhler, on observe une distribution normale du niveau de contrainte pour un nombre de cycles donné. On associe donc une courbe de Wöhler à une probabilité de rupture. Il est donc nécessaire de coupler une approche probabiliste à un critère de fatigue de façon à prendre en compte la dispersion observée expérimentalement sur les essais de fatigue. Par ailleurs une approche probabiliste couplée à un critère de type plan critique permettra de palier les inconvénients de ce type de critère, à savoir d'associer à chaque plan son « poids » réel vis-à-vis du chargement appliqué.

### 2.1.2. Effet de taille de fissure

Les travaux de Kitagawa et Takahashi [Kitagawa et al.,1976] ont permis de préciser le rôle des fissures sur la limite d'endurance d'un matériau. Les expériences suivantes ont été réalisées. Ces auteurs ont créé des défauts artificiels dans des éprouvettes en perçant des trous de diamètres et de profondeurs contrôlés à la surface de celles-ci (Figure 2-3.a). Chaque lot d'éprouvettes est ensuite soumis à une campagne d'essais de fatigue, afin d'établir une courbe de Wöhler pour chaque type de défaut artificiel (Figure 2-3.b). Le diagramme de Kitagawa-Takahashi est une représentation dans un diagramme log-log de la limite de fatigue en fonction de la taille du défaut initial. (Figure 2-3.c).



**Figure 2-3 : Mise en évidence de l'effet de taille de défaut sur la limite de fatigue [Kitagawa, 1976]**  
 (a) : Eprouvette contenant un défaut de taille  $a_i$ . (b) : Courbe de Wöhler et limite d'endurance  $\sigma_i$  obtenue pour cette éprouvette. (c) : Diagramme de Kitagawa : limite de fatigue  $\sigma_i$  en fonction de la taille  $a_i$  du défaut initial.

Lorsque le défaut artificiel est grand, la limite d'endurance mesurée évolue comme l'inverse de la racine carrée de la dimension caractéristique du défaut artificiel. En assimilant le défaut artificiel à une fissure, on montre alors qu'un critère de non-propagation pour  $K < K_S$ , fondé sur la mécanique linéaire de la rupture permet de déterminer la limite d'endurance –  $K_S$  étant le facteur d'intensité des contraintes seuil de non-propagation des fissures. Mais ce critère, étendu au domaine des très petits défauts surestime très fortement la limite d'endurance expérimentale.

En effet, lorsque les défauts artificiels sont petits, la limite d'endurance devient relativement indépendante de la dimension des défauts et tend vers la limite d'endurance  $\sigma_D$  déterminée sur le matériau sain. Ceci justifie d'employer des modèles en contrainte pour définir la limite d'endurance lorsque le matériau contient des défauts de petite dimension. Cependant, si l'on

identifie un critère en contrainte ( $\sigma = \sigma_D$ ) sur le matériau sain et que l'on tente de l'utiliser dans le domaine des grands défauts, on surestime alors fortement la limite d'endurance.

Ces observations ont été reproduites depuis par de nombreux auteurs, sur des matériaux métalliques variés et montrent que ce résultat est très général. Des expériences analogues ont notamment été reproduites pour des chargements biaxiaux [McEvily et al., 2005]. Des défauts artificiels surfaciques de tailles différentes ont été créés sur des éprouvettes en acier soumises à des chargements de traction, torsion et des chargements combinés. Un modèle de prévision de la limite d'endurance et de la durée de vie en fatigue en fonction de la taille de défaut est mis en œuvre. Il s'appuie sur la mécanique de la rupture avec une prise en compte du comportement élastoplastique, de la propagation des fissures courtes et de l'effet de fermeture de fissure. On constate que l'allure de la courbe représentant l'amplitude de la limite de fatigue en fonction de la taille de défaut correspond qualitativement à celle du diagramme de Kitagawa-Takahashi (Figure 2-4). On visualise bien un plateau pour les petits défauts qui correspond à une indépendance de la limite de fatigue à la taille de défaut dans ce domaine. La position de ce plateau est fonction du taux de biaxialité  $\sigma_2/\sigma_1$  ( $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant les composantes principales du tenseur des contraintes appliquées).

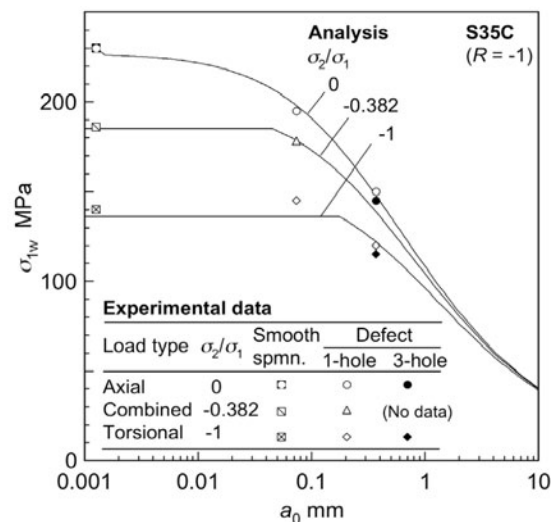
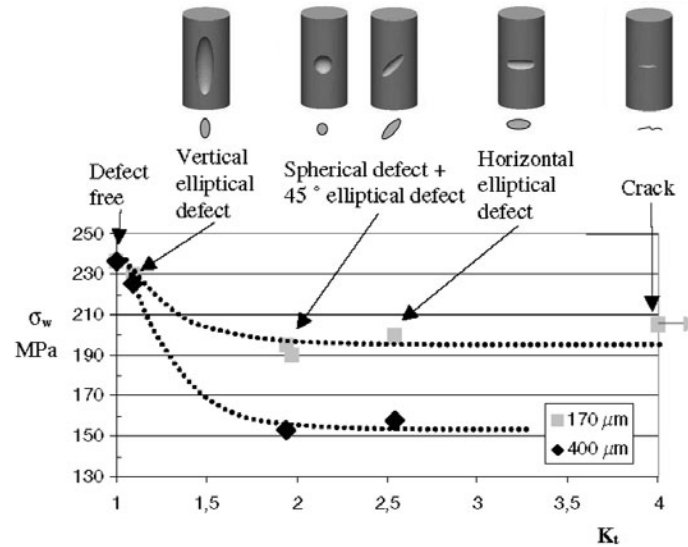


Figure 2-4 : Comparaison des limites de fatigues expérimentales et prédites par le modèle en fonction de la taille de défaut pour l'acier S35C [McEvily et al., 2005].

En plus d'un effet de taille, Billaudeau et col. [Billaudeau, 2004] ont également montré que la forme des défauts avait son importance. Des défauts artificiels de taille et de géométrie variées (Figure 2-5) ont été créés à la surface d'éprouvettes en acier à basse teneur en carbone (C36). Afin de pouvoir comparer l'effet de ces différents défauts sur la limite de fatigue, leur taille est caractérisée par le paramètre  $\sqrt{area}$  introduit par Murakami [Murakami, 1986]. Des essais de traction et de torsion ont permis en premier lieu de mettre en évidence un effet de taille : en dessous d'une taille seuil (de 100  $\mu$ m en traction et 150  $\mu$ m en torsion), la limite de fatigue est indépendante de la taille de défaut et tend vers celle du matériau sain. Les défauts entraînent une localisation de l'endommagement et on peut donc calculer pour chaque géométrie de défaut un facteur de concentration de contrainte qui lui est propre. Les essais de traction mettent en évidence une influence de la forme du défaut sur la limite de fatigue lorsque ce facteur de concentration de contrainte est inférieur à 2 (Figure 2-5). Dans le cas contraire, dès que le  $K_t$  est supérieur à deux, la limite de fatigue est indépendante de la géométrie du défaut et dépend uniquement de sa taille.



**Figure 2-5 : Evolution de la limite de fatigue en fonction du facteur de concentration des contraintes calculé pour différentes géométries de défauts, pour deux tailles différentes [Billaudeau et al.,2004].**

Par ailleurs, les auteurs ont aussi comparé les mécanismes d'amorçage sur défaut à ceux observés sur matériau sain par microplasticité. Dans les deux cas, l'amorçage s'effectue pour le système de glissement où la contrainte de cisaillement est maximum. Après une brève propagation en stade I, la fissure bifurque rapidement pour se propager en stade II.

Les travaux de Brown [Brown,1986] permettent d'analyser l'effet de la taille de défaut sur la vitesse et sur le mode de propagation des fissures (Figure 2-6). L'amplitude des contraintes à iso-vitesse de propagation des fissures est tracée en fonction de la dimension des fissures dans un diagramme de Kitagawa-Takahashi. La droite seuil de non-propagation des grands défauts sur le diagramme de Kitagawa-Takahashi correspond ici à une vitesse de propagation des fissures proche de zéro (0,1 nm/cycle). La pente de cette droite dans le diagramme de Kitagawa-Takahashi est de -1/2. Lorsque la plasticité à l'extrémité de la fissure devient plus conséquente (EPFM), la pente de cette droite diminue jusqu'à obtenir une amplitude de contrainte à iso-vitesse de propagation quasiment indépendante de la dimension des fissures.

A l'autre extrémité du diagramme, pour les petites tailles de défauts, on constate que Brown propose des seuils différents de la limite de fatigue du matériau sain. Les travaux de Miller [Miller,1987] expliquent ce phénomène à partir des différentes barrières microstructurales qu'une fissure courte est amenée à franchir et qui peuvent stopper sa propagation. Ainsi pour les défauts microstructuralement petits, on peut avoir propagation de fissure pour des niveaux de contraintes inférieurs à la limite de fatigue, mais les fissures s'arrêteront sur des barrières microstructurales (joints de grain...) et il faudra augmenter le niveau de contrainte pour avoir de nouveau propagation. Avec de telles considérations, on peut définir la limite de fatigue comme étant le niveau de contrainte nécessaire pour franchir la plus grande barrière microstructurale.

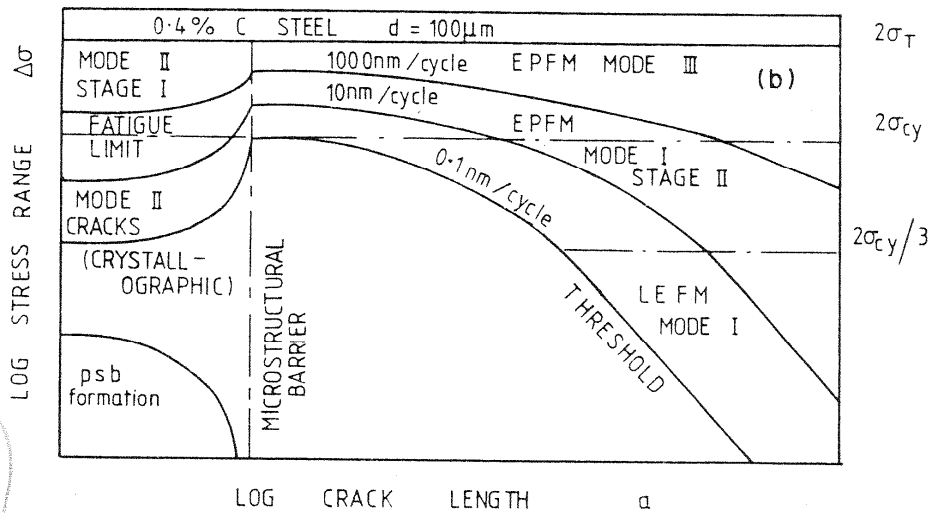


Figure 2-6 : Vitesses de propagation et modes de rupture dans un diagramme de Kitagawa [Brown,1986]

### Synthèse sur l'effet de taille de défaut :

**L'influence de la taille de défaut sur la limite de fatigue est un phénomène largement démontré. En fonction de la dimension des défauts, on distingue deux domaines pour la modélisation :**

- **Le domaine des très petits défauts, dans lequel prévalent les modèles en contrainte.**
- **Le domaine des grands défauts dans lequel prévalent les modèles fondés sur la mécanique de la rupture.**

**La plasticité au voisinage du défaut permet d'expliquer la transition entre ces deux domaines.**

### **2.1.3. Contrainte T**

Le critère de fatigue développé dans cette étude est un critère de non-propagation des fissures basé sur l'expression des champs de la mécanique linéaire de la rupture en pointe de fissure. La particularité de l'approche réside dans la prise en compte, dans l'expression de ces champs, de la contrainte T. En mode I, les composantes du tenseur des contraintes en pointe de fissure s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (2-15)$$

$(r, \theta)$  sont les coordonnées cylindriques en pointe de fissure et  $(x, y)$  les coordonnées cartésiennes (Figure 2-7).  $K_I$  est le facteur d'intensité des contraintes en mode I.

La contrainte  $T$  représente la contrainte qui agit parallèlement au plan de fissure et constitue le premier terme non-singulier du développement asymptotique des contraintes à l'extrémité de la fissure (équation (2-15)). Ce paramètre permet d'étendre la mécanique de la rupture vers le domaine des fissures courtes. En effet, les champs de la mécanique linéaire de la rupture dérivent d'un développement asymptotique en fonction de  $(r/a)$ , où  $r$  est la distance d'un point à l'extrémité de la fissure et  $a$  une dimension caractéristique de la fissure. Si la dimension caractéristique de la fissure diminue, la précision du développement asymptotique à une distance  $r$  donnée sera la même que pour une grande fissure à condition d'étendre l'ordre du développement asymptotique. Aussi, pour étendre la mécanique de la rupture vers le domaine des petits défauts, peut-on considérer les termes du développement asymptotique d'ordre immédiatement supérieurs à  $(r/a)^{-1/2}$ , et en premier lieu la contrainte  $T$ .

Ainsi, le chargement à l'extrémité de deux fissures, une courte et une longue, ne sera le même qu'à condition que les fissures soient soumises au même facteur d'intensité des contraintes  $K$  et à la même contrainte  $T$  [Hamam, 2005].

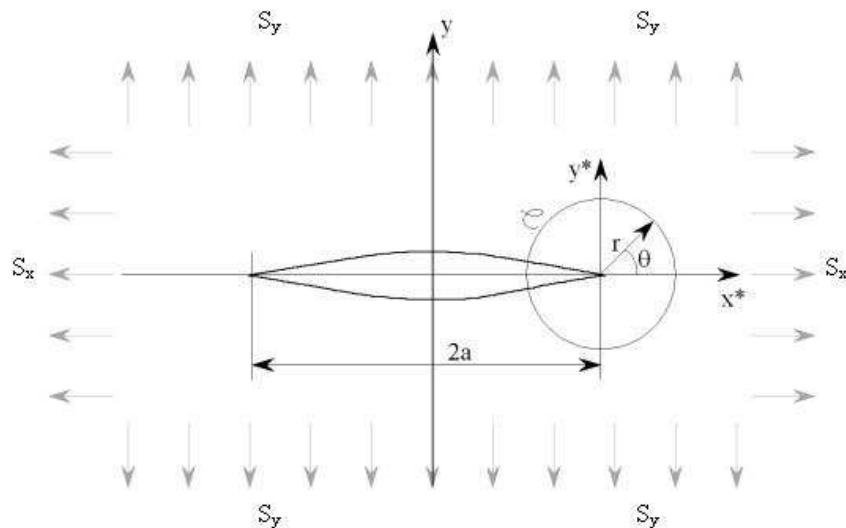


Figure 2-7 : Fissure traversante soumise à un chargement biaxial  $(S_x, S_y)$ .

Prenons, par exemple, le cas d'un milieu infini contenant une fissure traversante de dimension  $2a$ , située dans le plan  $(x, z)$ , et soumise à un chargement biaxial  $(S_x, S_y)$ .  $K_I$  et  $T$  sont alors définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} K_I = S_y \sqrt{\pi a} \\ T = S_x - S_y \end{cases} \quad (2-16)$$

Premièrement, l'équation (2-16) montre que la contrainte  $T$  dépend de la biaxialité du chargement. Deuxièmement, la contrainte  $T$  introduit un effet de taille de défaut, clairement visible sur la Figure 2-8 où l'on a tracé le rapport de la contrainte  $T$  au facteur d'intensité des contraintes  $K_I$ , en fonction de la taille de défaut pour un chargement uniaxial ( $S_x=0$ ,  $S_y$  donné).



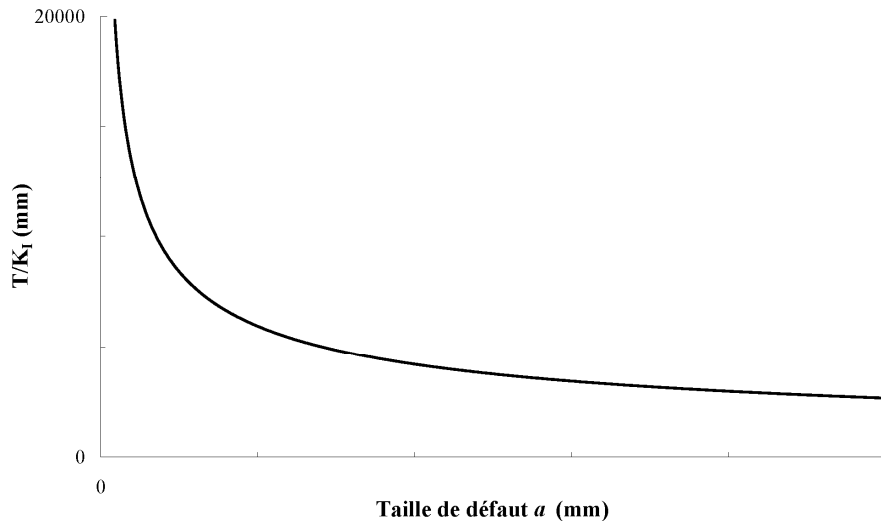


Figure 2-8 : Mise en évidence de l'effet de taille introduit par la contrainte  $T$  pour un chargement uniaxial quelconque,  $|T/K_I| = 1/\sqrt{\pi a}$ .

### Synthèse sur l'effet de la contrainte $T$ :

**La contrainte  $T$  est le premier terme non-singulier dans le développement asymptotique des contraintes en pointe de fissure, en mécanique élastique linéaire de la rupture. Généralement négligé, ce terme présente néanmoins deux avantages majeurs dans notre étude :**

- **Prise en compte de la biaxialité du chargement.**
- **Introduction d'un effet de taille de défaut.**

**Il semble donc que ce paramètre puisse être la clé pour étendre le domaine de la mécanique élastique linéaire de la rupture aux fissures courtes.**

## ***2.2. Définition du critère***

On a vu que la taille des défauts influe fortement sur la limite de fatigue du matériau. Le diagramme de Kitagawa-Takahashi [Kitagawa et al., 1976] montre clairement que l'on doit distinguer deux domaines pour modéliser la limite de fatigue d'un matériau : d'une part les grands défauts, dont on peut tenir compte via un modèle basé sur la mécanique linéaire de la rupture, et d'autre part les petits défauts, qui n'ont pas ou peu d'influence sur la limite de fatigue du matériau – on utilise alors un modèle en contraintes.

Dans la pratique cependant, les populations de défauts sont susceptibles d'appartenir à ces deux domaines selon les matériaux et selon les mécanismes d'amorçage. Ainsi utilise-t-on des méthodes fondées exclusivement sur la mécanique de la rupture pour certains matériaux (ex. TA6V), tandis que l'on utilise des méthodes fondées sur des critères d'endurance en contrainte pour d'autres matériaux (ex. Inco 718). Enfin certains matériaux présentent une population de défauts qui s'étend continûment sur les deux domaines (ex. N18) ou bien deux populations de défauts en compétition (petits défauts, nombreux, de l'ordre de la dizaine de microns et grands défauts, rares, de l'ordre du millimètre).

Aussi est-il nécessaire de proposer un critère de fatigue permettant de traiter de manière continue les deux domaines, d'une part pour pouvoir traiter les compétitions de populations de défauts ou les distributions de défauts qui s'étendent sur les deux domaines, et d'autre part pour répondre au souhait d'unifier les méthodes probabilistes utilisées à SNECMA.

Ce critère doit donc répondre au **cahier des charges** suivant :

- Répondre comme un modèle d'endurance multiaxial dans le domaine des petits défauts (ex. modèles énergétiques, de plans critiques etc..).
- Répondre comme un modèle fondé sur la mécanique de la rupture dans le domaine des grands défauts.
- Utiliser comme données matériau les courbes de fatigue usuelles établies sur éprouvettes d'une part, et la courbe de propriété matériau d'autre part.
- Fournir une probabilité de rupture en fonction de la sollicitation mécanique.

Pour les grands défauts, les modèles basés sur la mécanique linéaire de la rupture sont bien adaptés. Ils permettent d'introduire assez facilement un caractère probabiliste via une distribution de tailles, de position et d'orientation de défauts car ils font intervenir explicitement un paramètre caractéristique du défaut. Par ailleurs, les modèles en contraintes, applicables aux petits défauts, permettent de prendre en compte des sollicitations multiaxiales. On souhaite donc développer un critère qui s'appuie sur ces deux méthodes afin de reproduire au mieux l'effet de taille mis en évidence par Kitagawa et Takahashi [Kitagawa et al.,1976] et de bénéficier des avantages propres à chacune de ces méthodes.

Pour cela, l'approche que nous proposons consiste à établir un **critère de non-propagation de défauts supposés pré-existants dans la matière**. Les défauts sont assimilés à des fissures et le critère est établi en s'appuyant sur les champs de la mécanique linéaire de la rupture, ce qui assure une cohérence entre le critère proposé et la mécanique de la rupture pour les grands défauts.

Par ailleurs, la prise en compte de la contrainte  $T$  dans les champs asymptotiques de la mécanique linéaire de la rupture permet d'étendre leur validité vers le domaine des petites fissures. On verra que cela suffit à faire apparaître un effet d'échelle sur le seuil de non-propagation et à reproduire assez fidèlement le diagramme de Kitagawa-Takahashi. En particulier, le seuil de non-propagation, exprimé sous la forme d'une limite d'endurance, présente une relative indépendance à la dimension des défauts lorsque la taille des défauts diminue. Ceci permettra de comparer ce seuil aux critères d'endurance de la littérature.

Ces critères, tels que celui de Dang Van [Dang Van,1973], par exemple, sont des critères de non-amorçage de défauts et s'appliquent donc au matériau sain. Les fissures sont généralement supposées se former sous l'effet de déformations plastiques cycliques. Aussi le seuil de plasticité du milieu homogène, ou le seuil de glissement plastique sur un plan particulier est un paramètre important pour ces critères. Cette relation entre amorçage et plasticité permet de définir des critères d'endurance pour des chargements multiaxiaux et non-proportionnels.

L'approche proposée ici est différente puisque l'on suppose que les défauts existent et qu'ils sont assimilables à des fissures ; néanmoins pour assurer la cohérence avec les modèles d'endurance classique, on suppose que l'extension du dommage (c'est-à-dire la propagation des défauts) se produit sous l'effet d'une déformation plastique. Ce choix permet à la fois de prendre en compte des chargements multiaxiaux et non-proportionnels (plasticité) et des

populations de défauts (mécanique de la rupture). Le critère proposé fera donc partie de la famille des critères de type plan critique, le plan critique considéré étant le plan de la fissure. Par ailleurs, on suppose que l'endommagement (ici la propagation de la fissure) se produit dès lors qu'il y a plasticité dans la région en pointe de fissure.

Il faut donc définir un critère de plasticité pour la région en pointe de fissure. Pour cela, on utilise les champs de la mécanique linéaire de la rupture, en incluant la contrainte  $T$ , afin d'étendre ces champs vers le domaine des petites fissures. A partir de ces champs, c'est-à-dire à partir de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $T$ , on devra décider si la région en pointe de fissure se plastifie significativement. Pour cela, on se propose d'étendre le critère de plasticité de Von Mises au milieu fissuré. Pour mémoire, le critère de Von Mises suppose qu'un milieu solide soumis à des contraintes multiaxiales et homogènes se déforme plastiquement lorsque la densité d'énergie élastique de cisaillement de ce milieu atteint une valeur critique. Le critère postule que la valeur critique est celle atteinte lors d'un essai de traction au moment où l'on atteint la limite d'élasticité du matériau.

La même hypothèse est donc proposée pour la région en pointe de fissure. Celle-ci se plastifiera pour une énergie élastique de cisaillement critique. Cela permettra d'établir l'expression du critère de non-propagation de la fissure en fonction des facteurs d'intensité des contraintes et de la contrainte  $T$ , dont la définition et le rôle ont été rappelés au paragraphe 2.1.3.

Si l'on prend l'hypothèse de déformations planes le long du front de la fissure, le champ de déplacements en pointe de fissure s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \kappa + \cos \theta) + \frac{T}{8\mu} (\kappa + 1) r \cos \theta \\ u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (2 - \kappa - \cos \theta) - \frac{T}{8\mu} (3 - \kappa) r \sin \theta \\ u_z = 0 \end{cases} \quad (2-17)$$

$\mu$  et  $\kappa$  sont les coefficients de Lamé. Ils sont reliés au module d'Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau par :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2-18)$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \text{ en contrainte plane, } \kappa = 3-4\nu \text{ en déformation plane}$$

Par une rotation d'angle  $\theta$ , on détermine alors le champ de déplacement en coordonnées cylindriques :

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

Et on calcule également le tenseur des déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) & \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2-20)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, le tenseur des contraintes est lié au tenseur des déformations par la loi de Hooke :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2-21)$$

Connaissant l'expression des tenseurs des déformations et des contraintes, on en déduit l'expression de leurs déviateurs respectifs  $\underline{\underline{\varepsilon'}}$  et  $\underline{\underline{\sigma'}}$ . On a alors les données nécessaires pour déterminer la densité  $w$  d'énergie élastique de cisaillement de cisaillement qui s'exprime comme suit :

$$w = Tr(\underline{\underline{\sigma'}} . \underline{\underline{\varepsilon'}}) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{\sigma}}) . \underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon'}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) . \underline{\underline{I}} \quad (2-22)$$

L'énergie élastique de cisaillement  $U$  par unité de longueur de front de fissure se calcule à partir de la densité  $w$  d'énergie élastique de cisaillement intégrée sur un disque de rayon  $\delta$  entourant la pointe de fissure (Figure 2-9).

$$U(K_I, K_{II}, T) = \int_{r=0}^{r=\delta} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \frac{1}{2} Tr(\underline{\underline{\sigma'}} . \underline{\underline{\varepsilon'}}) r dr d\theta \quad (2-23)$$

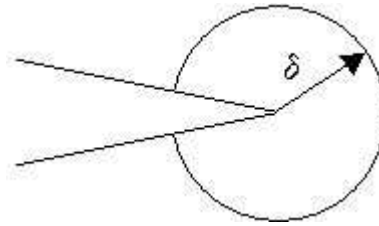


Figure 2-9 : Domaine d'intégration de la densité d'énergie élastique de cisaillement.

De manière analogue au critère de Von Mises, mais pour le cas d'un milieu fissuré, on postule qu'il y a plasticité à partir d'un seuil en énergie élastique de cisaillement critique, noté  $U_c$ . Par ailleurs, on fait l'hypothèse que la propagation de la fissure pourra se produire s'il y a plasticité dans la région en pointe de fissure. On définit donc le critère de non-propagation de la façon suivante :

$$U(K_I, K_{II}, T) < U_c \Rightarrow \text{Non-propagation} \quad (2-24)$$

On suppose que l'énergie seuil de non-propagation pour un chargement multiaxial quelconque est la même que pour un chargement uniaxial. On peut donc définir ce seuil  $U_c$  à partir du facteur d'intensité des contraintes seuil de non-propagation en mode I, noté  $K_{IS}$ . L'expression de  $U_c$  est alors :

$$U_c = U(K_{IS}, 0, 0) \quad (2-25)$$

Par conséquent, le critère de non-propagation s'exprime comme suit :

$$U(K_I, K_{II}, T) < U(K_{IS}, 0, 0) \Rightarrow \text{Non-propagation} \quad (2-26)$$

Après développement et simplification, le critère de non-propagation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left(\frac{K_I}{K_{IS}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIS}}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_S}\right)^2 + f_v \left(\frac{K_I}{K_{IS}}\right) \left(\frac{T}{T_S}\right) < 1 \Rightarrow \text{Non-propagation} \quad (2-27)$$

où les termes  $f_v$ ,  $K_{IIS}$ ,  $T_S$  sont définis en fonction de  $K_{IS}$  et de  $\delta$  par les équations suivantes :

$$f_v = \frac{32(1 - 10\nu + 10\nu^2)}{15\pi\sqrt{(1 - \nu + \nu^2)(7 - 16\nu + 16\nu^2)}} \quad (2-28)$$

$$K_{IIS} = K_{IS} \frac{\sqrt{7 - 16\nu + 16\nu^2}}{\sqrt{19 - 16\nu + 16\nu^2}} \quad (2-29)$$

$$T_S = K_{IS} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \frac{\sqrt{7 - 16\nu + 16\nu^2}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \quad (2-30)$$

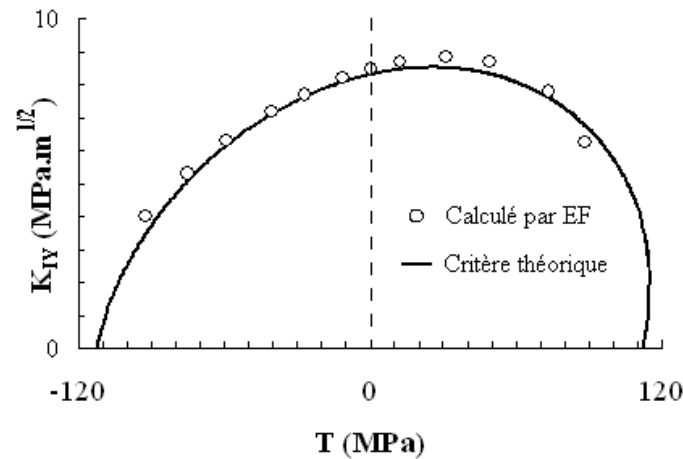
D'après l'expression du critère donnée par l'équation (2-27), on note que dès lors que le coefficient de Poisson  $\nu$  ainsi que le seuil  $K_{IS}$  de fissuration en mode I sont connus,  $f_v$  et  $K_{IIS}$  sont aussi connus et se calculent à partir des équations (2-28) à (2-30). Cependant, il reste à identifier le terme  $T_S$  qui s'exprime en fonction de  $K_{IS}$  et de la dimension  $\delta$  du domaine d'intégration.

De façon analogue, Hamam et Pommier ont établi un critère de non-propagation de fissure en mode I avec prise en compte de la contrainte T [Hamam et al., 2005] (équation (2-31)) :

$$\left(\frac{K_I}{K_{IS}}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_S}\right)^2 + f_v \left(\frac{K_I}{K_{IS}}\right) \left(\frac{T}{T_S}\right) < 1 \Rightarrow \text{Non-propagation} \quad (2-31)$$

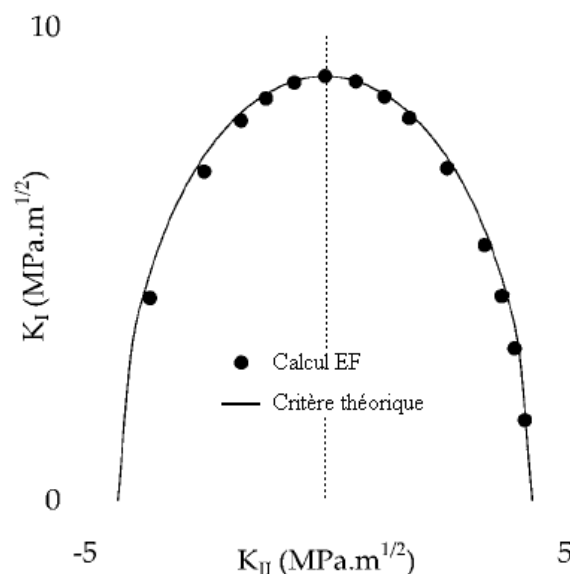
Ils ont par ailleurs établi une loi de propagation de fissure en mode I sous chargement biaxial qui relie l'avancée de fissure à l'émoussement plastique en pointe de fissure. Des calculs éléments finis permettent de calculer les champs de déplacement au cours du temps dans la région en pointe de fissure. On définit  $\rho$  comme le facteur d'intensité de la partie plastique du champ de déplacement. Et on se donne un critère de plasticité (de type offset) qui est de la

forme  $\Delta\rho > \rho_{th}$ . Lorsque la contrainte T est nulle, et que l'on applique un chargement  $K_I$  croissant, la valeur de  $\rho_{th}$  est définie comme étant la valeur de  $\rho$  au moment où  $K_I$  atteint  $K_{IY}$ , l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes en mode I qui conduit à une avancée de fissure. Avec, là encore, l'hypothèse que la propagation se produit s'il y a plasticité. Ensuite, des chargements de type  $K_I$  croissant, mais pour diverses valeurs du rapport T/ $K_I$ , ont été examinés. Pour chacun, le champ de déplacement a été traité de manière à en extraire  $\rho$  et la valeur de  $K_I$  au moment où  $\rho$  atteint  $\rho_{th}$  est tracée sur un graphique pour chaque valeur du ratio T/ $K_I$  testé. Les résultats des calculs par éléments finis, obtenus de cette manière (Figure 2-10), se superposent de façon presque parfaite avec la courbe issue du critère proposé (2-31).



**Figure 2-10 : Comparaison du critère de non-propagation en mode I avec la frontière du domaine élastique de la structure fissurée calculée par éléments finis selon un critère  $\Delta\rho = 0,2 \mu\text{m}$ . Matériau :  $E=200 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0,3$ ,  $R_e=100 \text{ MPa}$ , écrouissage cinématique linéaire  $H=100 \text{ MPa}$  [Hamam et al.,2005].**

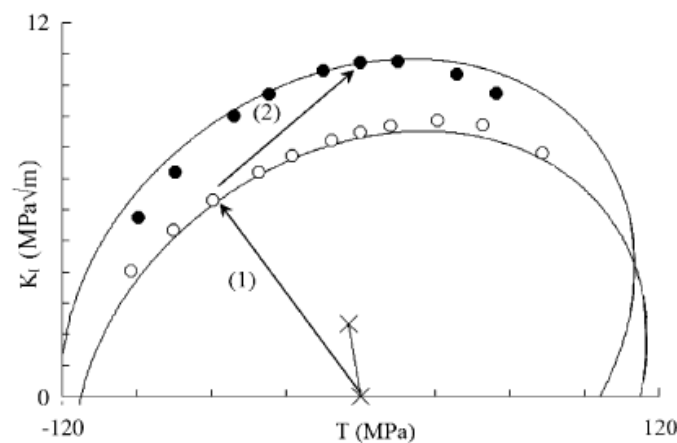
Une étude similaire a été menée par Pommier et col. pour la plasticité en mode mixte, mais sans prise en compte de la contrainte T [Pommier,2007]. On observe, là aussi, une très bonne corrélation entre les résultats éléments finis et le critère (Figure 2-11).



**Figure 2-11 : Comparaison du critère de non-propagation en mode mixte avec la frontière du domaine élastique de la structure fissurée calculée par éléments finis [Pommier,2007].**

La détermination du domaine d'élasticité de la région en pointe de fissure permet par ailleurs d'étudier son évolution en fonction du chargement appliqué. On constate alors qu'un trajet de chargement proportionnel ou non-proportionnel (Figure 2-12) n'affecte pas la forme de la surface seuil de plasticité mais conduit à un déplacement de celle-ci dans le plan  $(K_I, T)$  [Hamam et al.,2005]. La même observation a été faite par Pommier en mode mixte [Pommier,2007].

Ainsi, lorsqu'un chargement cyclique est appliqué autour d'une contrainte moyenne non-nulle, les mêmes raisonnement pourront s'appliquer en considérant que le centre de la surface seuil se déplace dès qu'il est rencontré. C'est alors l'amplitude de l'énergie élastique de cisaillement dans la région en pointe de fissure qui pourra être utilisée dans le critère. Mais, dans un premier temps, on néglige cet aspect et on suppose que cette surface reste centrée sur  $K_I=0$  et  $T=0$ .



**Figure 2-12 : Evolution du domaine élastique de la structure fissurée lors d'un trajet de chargement non-proportionnel : surface après le chargement (1) en blanc et après le chargement (2) en noir [Hamam et al.,2005].**

### **Synthèse sur la définition du critère :**

On fait l'hypothèse que le matériau contient des défauts pré-existants à la sollicitation de fatigue et ces défauts sont assimilés à des fissures. Il y aura propagation de ces fissures en présence de déformation plastique en pointe de fissure. Le critère proposé est alors un critère de non-propagation basé sur un « domaine d'élasticité » du milieu fissuré.

Il est construit à partir d'une énergie élastique de cisaillement critique calculée à l'aide des champs de la mécanique linéaire de la rupture. La prise en compte du premier terme non-singulier du développement asymptotique de la mécanique linéaire de la rupture – i.e. la contrainte  $T$  – permet d'introduire l'effet de la taille du défaut sur la limite d'endurance mis en évidence par Kitagawa et Takahashi.

Le critère de plasticité de la région à l'extrémité de la fissure a été validé par des calculs numériques par éléments finis, aussi bien pour un chargement en mode mixte I+II en l'absence de contrainte  $T$ , que pour un chargement en mode I en présence d'une contrainte  $T$ . Le facteur d'intensité des contraintes seuil de plasticité de la structure fissurée en mode I est significativement modifié par la présence d'une contrainte  $T$ .

Il s'agit d'un critère de type plan critique : le plan critique correspondant au plan de propagation de la fissure. La prise en compte de la biaxialité du chargement est assurée par l'introduction de la contrainte  $T$  dans l'expression du critère.

## ***2.3. Identification***

Le critère de non-propagation proposé au paragraphe précédent est fonction des facteurs d'intensité des contraintes en mode I et II ainsi que de la contrainte  $T$  en chaque point du front de fissure, sous une hypothèse de déformation plane le long du front de fissure. Les paramètres matériaux requis sont le coefficient de Poisson et le seuil de non-propagation des fissures en mode I. De plus, il faut identifier un paramètre supplémentaire, soit le paramètre  $T_s$ , soit la dimension  $\delta$  du domaine d'intégration. La méthode employée pour identifier ce paramètre supplémentaire est développée dans ce paragraphe.

Dans cette première partie, l'effet de la contrainte moyenne du cycle de fatigue sur le critère de non-propagation n'est pas examiné. La contrainte appliquée varie entre  $\underline{0}$  et  $\underline{\sigma}$ .

### **2.3.1. Principe**

Les défauts sont assimilés à des fissures et diverses hypothèses peuvent être envisagées quant à leur modélisation en fonction du problème traité. De nombreuses configurations peuvent être retenues en s'appuyant sur les bibliothèques de solutions pour les facteurs d'intensité des contraintes [Murakami, 1987].



Dans la suite du texte, on considérera deux géométries différentes :

- Une **fissure circulaire** représentative d'un défaut noyé dans le volume de la pièce. (Figure 2-13.a).
- Une **fissure semi-circulaire** représentative d'un défaut à la surface de la pièce. (Figure 2-13.b).

La dimension du défaut correspond alors au rayon  $a$  de la fissure équivalente et son orientation est définie par la normale  $\underline{n}$  au plan de fissure. On définit par ailleurs un point du front de la fissure par sa normale  $\underline{t}$  (Figure 2-13.a). On note alors :  $\sigma_n = (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}$  la contrainte normale,  $\tau = (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{t}$  la contrainte tangentielle au plan de la fissure et normale à son front et  $\sigma_t = (\underline{\sigma} \cdot \underline{t}) \cdot \underline{t}$  la contrainte normale au plan de normale  $\underline{t}$ . Selon l'hypothèse retenue pour modéliser le défaut, on peut exprimer les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  et la contrainte  $T$  en fonction de  $\sigma_n$ ,  $\tau$  et  $\sigma_t$ .

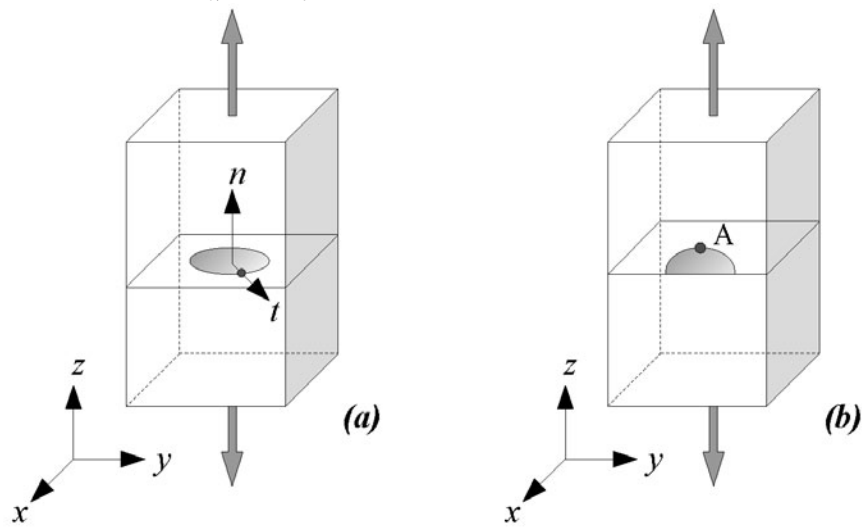


Figure 2-13 : Modélisation des défauts par des fissures de géométries particulières  
(a) fissure circulaire noyée dans un massif infini, (b) fissure semi-circulaire noyée dans un massif semi-infini.

Ainsi, pour une fissure circulaire noyée dans un milieu infini on a [Tada et al.,1985] [Wang,2004] :

$$\begin{cases} K_I = \frac{2}{\pi} \langle \sigma_n \rangle \sqrt{\pi a} \\ K_{II} = \frac{4}{\pi(2-\nu)} \tau \sqrt{\pi a} \\ T = \sigma_t - \frac{1+2\nu}{2} \langle \sigma_n \rangle \end{cases} \quad (2-32)$$

Où  $\langle x \rangle$  est la partie positive de  $x$ . De la même façon pour une fissure semi-circulaire dans un massif semi-infini, on a les expressions suivantes au point A sur la Figure 2-13.b [Newman & Raju,1981] [Wang,2003] :

$$\begin{cases} K_I = 0,663 \sigma_n \sqrt{\pi a} \\ K_{II} = 0,749 \tau \sqrt{\pi a} \\ T = \sigma_t - 0,532 \sigma_n \end{cases} \quad \text{avec } \nu = 0,3 \quad (2-33)$$

Avec de telles hypothèses sur les défauts, il est alors possible de formuler le critère de non-propagation proposé dans l'équation (2-27) comme une fonction du tenseur des contraintes appliquées  $\underline{\sigma}$  et de la taille de défaut  $a$ . Si l'on explicite toutes les variables et les paramètres du critère, on obtient une expression de la forme suivante :

$$\left( \frac{K_I(\sigma_n, a)}{K_{IS}} \right)^2 + \left( \frac{K_{II}(\tau, a)}{K_{IS}(\nu)} \right)^2 + \left( \frac{T(\sigma_n, \sigma_t)}{T_s(K_{IS}, \nu, \delta)} \right)^2 + f_\nu(\nu) \left( \frac{K_I(\sigma_n, a)}{K_{IS}} \right) \left( \frac{T(\sigma_n, \sigma_t)}{T_s(K_{IS}, \nu, \delta)} \right) < 1 \quad (2-34)$$

Le critère s'exprime en fonction de quatre variables :

- Trois variables relatives au chargement appliqué ( $\sigma_n, \sigma_t, \tau$ )
- Une variable caractéristique de la dimension du défaut ( $a$ )

Il contient trois paramètres relatifs à chaque matériau :

- $\nu$  : coefficient de Poisson.
- $K_{IS}$  : facteur d'intensité des contraintes seuil de non-propagation des fissures en mode I.
- $\delta$  : rayon du domaine d'intégration de la densité d'énergie élastique de cisaillement.

Par souci de simplicité, dans la suite du texte, on notera le critère comme suit :

$$\text{Critère}[\sigma_n, \sigma_t, \tau, a, \nu, K_{IS}, \delta] < 1 \quad (2-35)$$

$\nu$  et  $K_{IS}$  sont généralement connus, il reste donc à identifier le paramètre  $\delta$ . On fait alors les trois hypothèses suivantes :

- ***L'identification est réalisée pour un matériau contenant des défauts.***  
Le critère est développé dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture pour des défauts supposés existants et modélisés par des fissures.
- ***L'identification est réalisée dans le domaine des tous petits défauts, pour lequel la limite de fatigue est relativement indépendante de la dimension des défauts.***  
La limite d'endurance en traction d'un matériau est déterminée à partir d'un nombre important d'essais de fatigue, pour un matériau supposé sain (c'est-à-dire sans défauts). Cependant un matériau n'est jamais totalement dépourvu de défauts : les grains, par exemple, peuvent parfois être assimilés à des défauts s'ils sont des sites privilégiés pour l'amorçage de fissure de fatigue. On fera ici l'hypothèse que l'on détermine la limite d'endurance  $\sigma_f$  non pas pour un matériau sans défaut, mais pour un matériau contenant de très petits défauts de taille caractéristique  $a_{\sigma f}$ . Cette dimension peut être assimilée à la barrière

microstructurale de plus grande taille introduite par Miller [Miller,1987] et présentée au paragraphe 2.1.2.

- ***Le paramètre  $\delta$  est défini comme une fraction  $\varepsilon$  de la dimension  $a_{\sigma_f}$  de la plus petite fissure susceptible de se propager pour une contrainte égale à la limite de fatigue.***

Par commodité, on identifie la valeur de  $\delta$  de façon à ce que le seuil de non-propagation corresponde à la limite de fatigue d'un matériau contenant des défauts de taille  $a_{\sigma_f}$ .  $\delta$  représente alors le rayon du domaine d'intégration à l'extrémité d'une fissure de dimension  $a_{\sigma_f}$ , on peut donc l'exprimer comme une fraction de cette taille (équation (2-36)).

Au vu de ces hypothèses, on se donne l'expression suivante pour le paramètre  $\delta$  :

$$\delta = \varepsilon \cdot a_{\sigma_f} \quad (2-36)$$

Certaines restrictions sont à considérer pour l'identification, liées aux hypothèses sur lesquelles se fondent le critère, à savoir celles de la mécanique linéaire de la rupture et de la mécanique des milieux continus :

- ***Plus  $\delta$  est petit et plus les champs de la mécanique linéaire de la rupture sont précis.***

L'énergie élastique de cisaillement à la base du critère est calculée à l'aide des champs de la mécanique linéaire de la rupture. Ces champs sont déterminés à partir d'un développement asymptotique en  $r/a$  au voisinage de  $r/a = 0$ ,  $a$  étant la dimension de la fissure et  $r$  la distance entre un point et son extrémité (Figure 2-14). A proximité de l'extrémité de la fissure l'hypothèse de déformation plane selon la direction tangente au front de la fissure et l'erreur associée au développement asymptotique restent acceptables. Si la distance  $r$  à l'extrémité de la fissure reste inférieure à  $a/10$ , l'erreur moyenne reste typiquement inférieure à 10%.

- ***$\delta$  doit être suffisamment grand au regard de la microstructure pour respecter les hypothèses de la mécanique des milieux continus.***

Les champs de la mécanique linéaire de la rupture sont déterminés en élasticité isotrope, ce qui implique que le milieu est homogénéisé. Cette hypothèse n'est raisonnable que si  $\delta$  est bien supérieure à la taille des grains.

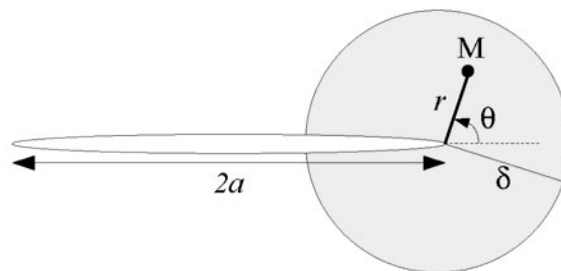


Figure 2-14 : Zone de validité des champs de la mécanique linéaire de la rupture.

Il s'agit donc de trouver une **valeur optimale de  $\delta$**  qui respecte ces deux contraintes.

On cherche à identifier  $\delta$  de façon à ce que le seuil de non-propagation donné par le critère corresponde à la limite de fatigue du matériau. Cela se traduit par :

$$\text{Critère} \left[ \sigma_n = \sigma_f, \sigma_t = 0, \tau = 0, a = a_{\sigma_f}, \nu, K_{IS}, \delta \right] = 1 \quad (2-37)$$

Sous ces conditions, les facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte et la contrainte T, se réduisent aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} K_I = Y_I \sigma_f \sqrt{\pi a_{\sigma_f}} = Y_I \sigma_f \sqrt{\pi \frac{\delta}{\varepsilon}} \\ K_{II} = 0 \\ T = Y_T \sigma_f \end{cases} \quad (2-38)$$

$Y_I$  et  $Y_T$  sont des facteurs de forme du défaut dont on a précisé les expressions pour un défaut de type circulaire (équation (2-32)) et pour un défaut de type semi-circulaire (équation (2-33)).

Pour plus de clarté, on simplifie les équations (2-29) et (2-30) de la façon suivante :

$$K_{IS} = K_{IS} \cdot f_{II}(\nu) \quad (2-39)$$

$$T_s = \frac{K_{IS}}{\sqrt{\delta}} f_T(\nu) \quad (2-40)$$

En combinant l'expression du critère (équation (2-27)) aux expressions (2-38) à (2-40), on obtient :

$$\delta \cdot \left( \frac{\sigma_f}{K_{IS}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\pi}{\varepsilon} Y_I^2 + \frac{Y_T^2}{f_T(\nu)^2} + f_\nu \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \frac{Y_I Y_T}{f_T(\nu)} \right) = 1 \quad (2-41)$$

La résolution de l'équation précédente nous permet d'écrire  $\delta$  de la façon suivante et avec les valeurs numériques suivantes pour un défaut circulaire interne:

$$\delta = g(\nu, \varepsilon) \cdot \left( \frac{K_{IS}}{\sigma_f} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g(\nu = 0.3, \varepsilon = 0.01) = 0.007 \\ g(\nu = 0.3, \varepsilon = 0.05) = 0.03 \\ g(\nu = 0.3, \varepsilon = 0.1) = 0.05 \end{cases} \quad (2-42)$$

Ainsi, avec la seule contrainte de tendre vers la limite de fatigue en traction-compression pour les tout petits défauts, diverses valeurs peuvent être choisies pour  $\delta$ . Une valeur correspondant à  $\varepsilon=0.1$  respecte les restrictions imposées sur la valeur de  $\delta$ , mais  $\varepsilon=0.09$  serait tout aussi acceptable.

On doit donc se donner une contrainte supplémentaire pour identifier la valeur de  $\delta$ . Selon l'équation (2-34), le paramètre  $\delta$  n'intervient que dans l'expression de la contrainte T seuil. Or, la contrainte T est caractéristique de la biaxialité du chargement. Aussi n'est-il pas surprenant que les seuls résultats d'essais de traction-compression uniaxiale ne puissent pas suffire pour identifier  $\delta$ . Il faudra donc faire intervenir la limite de fatigue pour un chargement multiaxial. Dans la suite du texte, nous utiliserons en plus, la limite de fatigue en torsion pour identifier  $\delta$ .

La méthode d'identification du paramètre  $\delta$  est alors la suivante :

- On étudie la réponse du critère à un chargement biaxial  $(\sigma_1, \sigma_2)$  et l'influence du paramètre  $\delta$  pour ce type de chargement.
- On compare cette réponse à celle d'un critère d'endurance couramment utilisé, à savoir le critère de Dang Van [Dang Van, 1973].
- On identifie le paramètre  $\delta$  de façon à ce que le critère présente la même sensibilité à la biaxialité du chargement que celle du critère de Dang Van.

On souhaite donc **représenter la réponse du critère pour un chargement biaxial** de composantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Connaissant le chargement appliqué, il nous faut alors faire une hypothèse quant au plan de propagation de fissure de façon à déterminer les composantes du tenseur des contraintes dans ce plan qui interviennent dans l'expression du critère. On se limitera dans un premier temps à deux hypothèses, validées par de nombreuses observations expérimentales [Billaudeau et al., 2004] :

- **Hypothèse de « propagation en mode I »**  
Propagation de fissure dans le plan orthogonal à la contrainte principale maximale.
- **Hypothèse de « propagation en mode II »**  
Propagation de fissure dans le plan de cisaillement maximal.

Considérons un trajet de chargement tel que l'on amène la structure d'un état non contraint (0,0) à un état biaxial  $(\sigma_1, \sigma_2)$ . Les valeurs des contraintes normale et parallèle au front de fissure dépendent de la position du point de chargement dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$  (Figure 2-15).

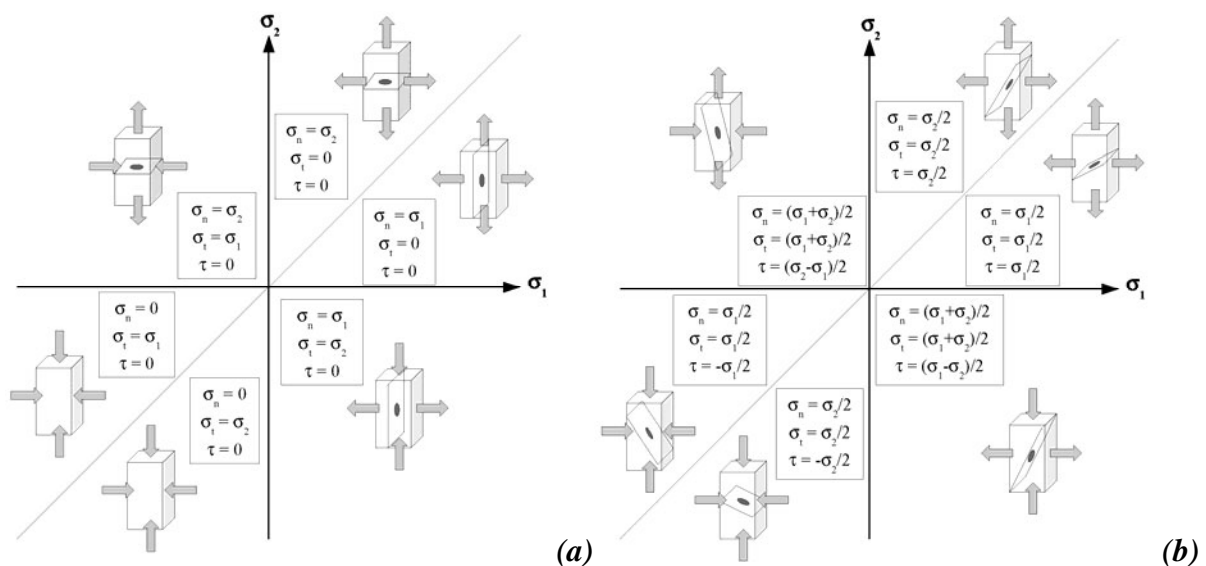


Figure 2-15 : Valeurs des contraintes normales, tangentielles et parallèles au front de fissure pour un chargement biaxial  $(\sigma_1, \sigma_2)$

(a) hypothèse de propagation en mode I (b) hypothèse de propagation en mode II.

On peut alors représenter la surface seuil du critère de non-propagation dans un plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$ . En traction uniaxiale, les paramètres seront définis de manière à retrouver la limite de fatigue du matériau pour les très petits défauts. Ensuite, la sensibilité du critère à la pression hydrostatique sera définie de manière à être similaire à celle du critère de Dang Van pour le matériau d'étude.

### 2.3.2. Matériau

Le critère a été identifié pour l'acier 30NCD16 dont les données utilisées – coefficient de poisson  $\nu$ , seuil de fissuration en mode I noté  $K_{IS}$  et limite de fatigue en traction  $\sigma_D$  et torsion  $\tau_D$  – sont tirées de la littérature [Banvillet et col., 2003] (Tableau 2-1).

$\nu$	$K_{IS}$ [MPa.m <sup>1/2</sup> ]	$\sigma_D$ [MPa]	$\tau_D$ [MPa]
0,29	7	560	428

Tableau 2-1 : Données matériau pour l'acier 30NCD16 [Banvillet et col., 2003].

Banvillet et col. [Banvillet et col., 2003] ont aussi identifié les paramètres du critère d'endurance multiaxial de Dang Van pour ce matériau.

### 2.3.3. Identification en biaxial

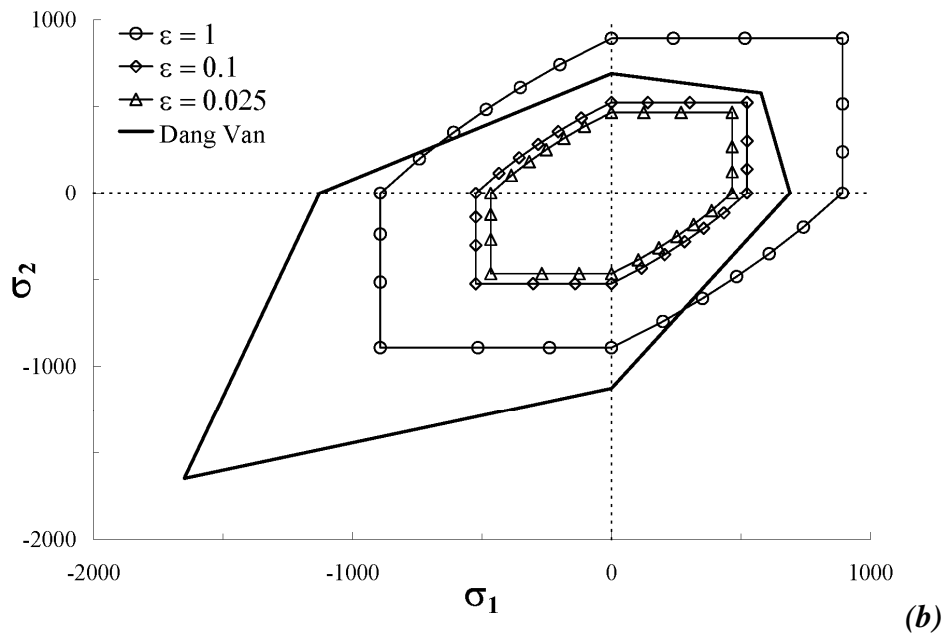
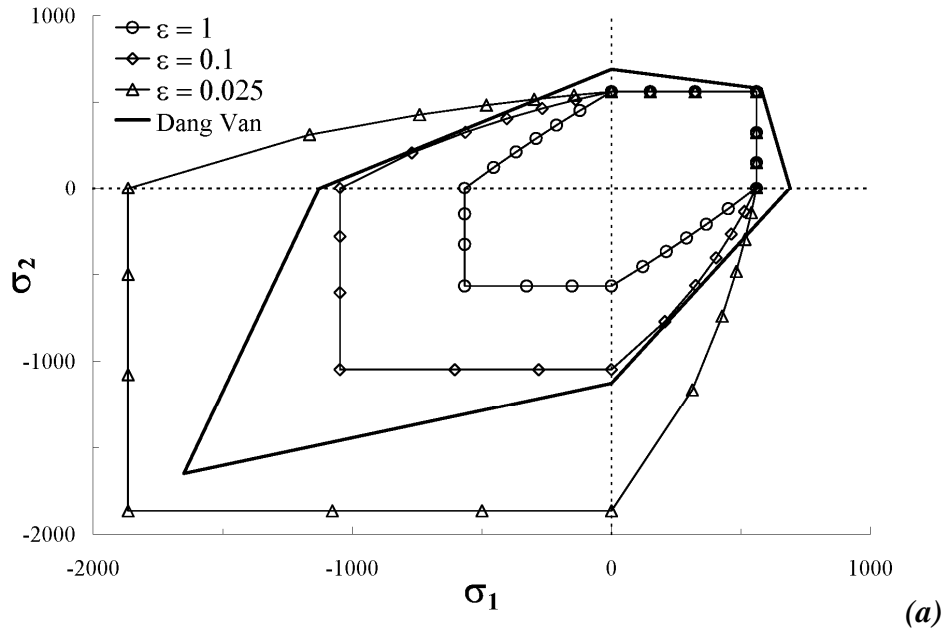
La réponse du critère à des sollicitations multiaxiales est examinée afin de montrer graphiquement la sensibilité du critère proposé au choix du paramètre  $\delta$ . On fixe différentes valeurs pour  $\varepsilon$  (équation (2-36)), pour chacune desquelles la valeur de  $\delta$  correspondante est telle que le seuil de non-propagation en mode I corresponde à la limite de fatigue en traction (équation (2-42)). Le critère est alors représenté pour chaque valeur de  $\delta$  dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les deux composantes principales du tenseur des contraintes appliquées, dans le cas d'une hypothèse de propagation en mode I (Figure 2-16.a) et dans le cas d'une hypothèse de propagation en mode II (Figure 2-16.b).

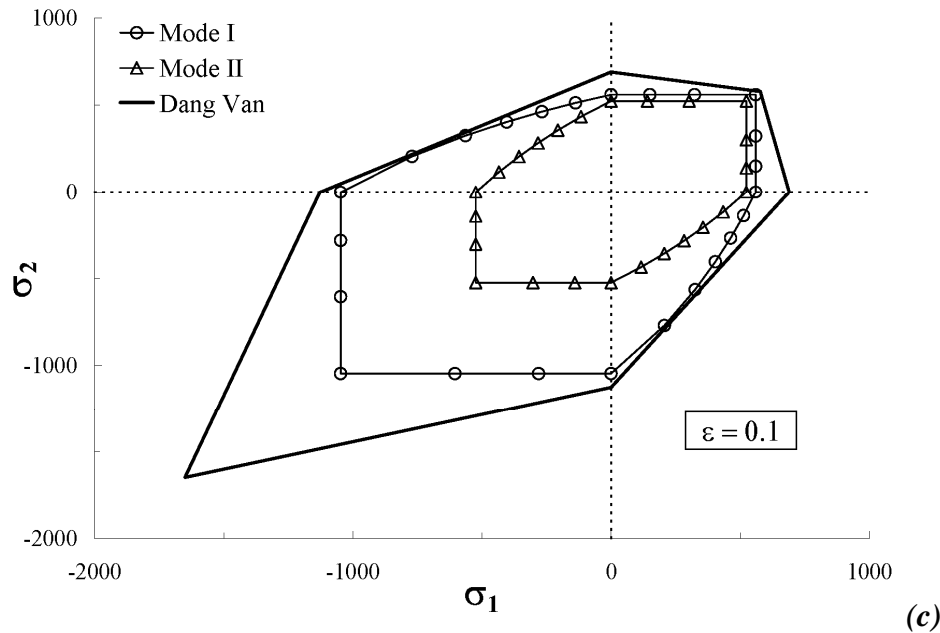
On représente graphiquement les trois cas suivants :

$\varepsilon$	0,025	0,1	1
$\delta$ [ $\mu\text{m}$ ] (équation (2-42))	2,6	8,3	28,4
$a_{\sigma f}$ [ $\mu\text{m}$ ] (équation (2-36))	104,6	83	28,4

Tableau 2-2 : Valeurs du paramètre  $\delta$ , de la taille de défaut caractéristique à la limite de fatigue  $a_{\sigma f}$  pour différentes valeurs du coefficient de proportionnalité  $\varepsilon$ .

La valeur  $\varepsilon = 0,1$  est la plus cohérente vis-à-vis des hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture et de la mécanique des milieux continus. Pour  $\varepsilon = 0,025$  les développements asymptotiques en pointe de fissure sur lesquels sont basés les champs de la mécanique linéaire de la rupture sont très précis, mais  $\delta = 2,6 \mu\text{m}$  est nettement inférieur à la taille des grains. Quant à la valeur  $\varepsilon = 1$ , elle conduit à une valeur de  $\delta$  bien supérieure à la taille des grains, mais les champs de la mécanique linéaire de la rupture sont très imprécis à cette distance  $\delta$  de l'extrémité de la fissure. Cela permet cependant de visualiser l'influence du choix du paramètre  $\delta$  sur la sensibilité du critère à la biaxialité du chargement.





**Figure 2-16 : Illustration graphique de l'identification du paramètre  $\delta$  à partir de la limite de fatigue en torsion et en traction**

**(a) Hypothèse de propagation en mode I (b) Hypothèse de propagation en mode II (c) Comparaison des deux hypothèses pour une valeur de  $\varepsilon$  donnée**

Pour l'hypothèse de propagation en mode I (Figure 2-16.a), on note que la frontière du domaine de non-propagation des fissures est insensible à la valeur de  $\delta$  dans le domaine de la bi-traction. En revanche, en traction-compression ( $\sigma_1 > 0$  et  $\sigma_2 < 0$  ou  $\sigma_2 > 0$  et  $\sigma_1 < 0$ ), cette frontière est sensible à la valeur de  $\delta$ . Plus  $\delta$  est petit, plus la dimension du domaine de non-propagation est grande.

Le critère de Dang Van, identifié pour l'acier 30NCD16, a été tracé sur le même graphe (Figure 2-16.a), afin de le comparer avec le critère de non-propagation proposé. Pour une valeur de  $\varepsilon$  égale à 0,1, le critère proposé est très proche de celui de Dang Van.

Avec une hypothèse de propagation en mode II (Figure 2-16.b), on constate que la surface seuil est symétrique par rapport aux deux bissectrices du plan ( $\sigma_1, \sigma_2$ ). La forme de la surface seuil est insensible à la valeur de  $\delta$ . Si les surfaces ne sont pas confondues, c'est parce que les surfaces tracées ici correspondent aux valeurs du tableau 2-2, calculées avec une hypothèse d'amorçage en mode I. Avec cette hypothèse, la limite de fatigue est indépendante de la pression hydrostatique.

Pour une même valeur de  $\varepsilon$ , égale à 0,1, on compare les surfaces seuil du critère pour les deux hypothèses de propagation (mode I et mode II) (Figure 2-16.c). On constate que la surface seuil en mode II est entièrement comprise à l'intérieur de la surface seuil en mode I. Cela signifie qu'une fissure pourrait se propager en mode II pour des niveaux de chargements plus faibles que ceux nécessaires à une propagation en mode I. En fait, c'est généralement ce qui est observé expérimentalement, les fissures qui s'initient en mode II ne conduisent cependant pas à la rupture en mode II, car la plupart s'arrêtent ou bifurquent pour se propager ensuite en mode I.



Pour ces deux raisons, il semble donc plus approprié de ne considérer par la suite que l'hypothèse de propagation en mode I.

Le paramètre  $\delta$  est identifié de manière à obtenir la meilleure concordance possible entre le critère proposé et celui de Dang Van (Figure 2-17). Les deux critères coïncident précisément en deux points, dans le plan  $(\sigma_1, \sigma_2)$ .

Pour le chargement uniaxial de tension :

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = f_D \quad (2-43)$$

Ainsi que pour le chargement uniaxial de compression (extrapolé) :

$$\sigma_1 = \frac{f_D \tau_D}{f_D - \tau_D}, \quad \sigma_2 = 0 \quad (2-44)$$

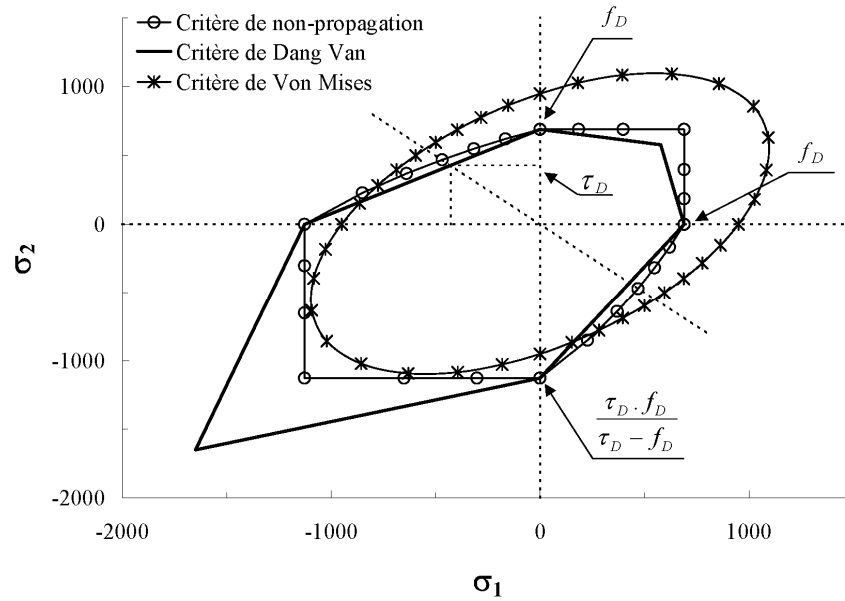
$f_D$  et  $\tau_D$  étant les limites de fatigue en flexion et torsion qui permettent d'identifier les paramètres du critère de Dang Van (Figure 2-17). La valeur de  $f_D$  est de 690 MPa [Banvillet et col., 2003].

La valeur de  $\delta$  ainsi identifiée et les valeurs correspondantes de  $a_{\sigma f}$ ,  $\varepsilon$  et  $T_s$  sont consignées dans le Tableau 2-3.

$K_{IS}$ [MPa.m <sup>1/2</sup> ]	$\delta$ [μm]	$\varepsilon$	$a_{\sigma f}$ [μm]	$T_s$ [MPa]
7	7,16	0.15	49,15	1120

**Tableau 2-3 : Jeu de paramètres identifiés pour le critère pour l'acier 30NCD16, et valeurs correspondantes de  $\varepsilon$ ,  $a_{\sigma f}$  et  $T_s$**

Il est intéressant de souligner que l'identification du paramètre  $\delta$  pour le 30NCD16 correspond à une valeur de  $a_{\sigma f}$  de l'ordre de la taille des grain. Ceci est cohérent avec le fait que  $a_{\sigma f}$  « représente physiquement » la taille du plus petit défaut dans le matériau. Par ailleurs, pour la valeur correspondante de  $\varepsilon$ , l'approximation faite lors du calcul des champs de la mécanique linéaire de la rupture reste acceptable.



**Figure 2-17 : Comparaison du critère de non-propagation identifié pour l'acier 30NCD16 avec les critères de Dang Van et Von Mises.**

Sur la Figure 2-17, le critère de Von Mises est aussi tracé pour un état de contrainte biaxial. On constate que pour un chargement de bi-compression, le critère de non-propagation proposé ici est proche du critère de Von Mises. En effet, pour ce type de chargement, la rupture ne provient pas de la propagation de fissures de fatigue mais de la plasticité généralisée du matériau. Or comme le critère de non-propagation est basé sur une énergie élastique de cisaillement critique, il est bien normal qu'il soit proche du critère de Von Mises en bi-compression.

Une fois identifiée, la surface seuil du critère identifié pour l'acier 30NCD16 est tracée sur la Figure 2-18 dans les plans  $(T, K_I)$  pour  $K_{II}=0$ ,  $(K_{II}, K_I)$  pour  $T=0$  et  $(T, K_{II})$  pour  $K_I=0$ . Au vu de l'expression du critère (équation (2-27)) les surfaces seuil sont des ellipses dans chacun de ces plans. L'ellipse dans le plan  $(T, K_I)$  est inclinée du fait du terme couplé entre  $T$  et  $K_I$  dans l'équation (2-27).

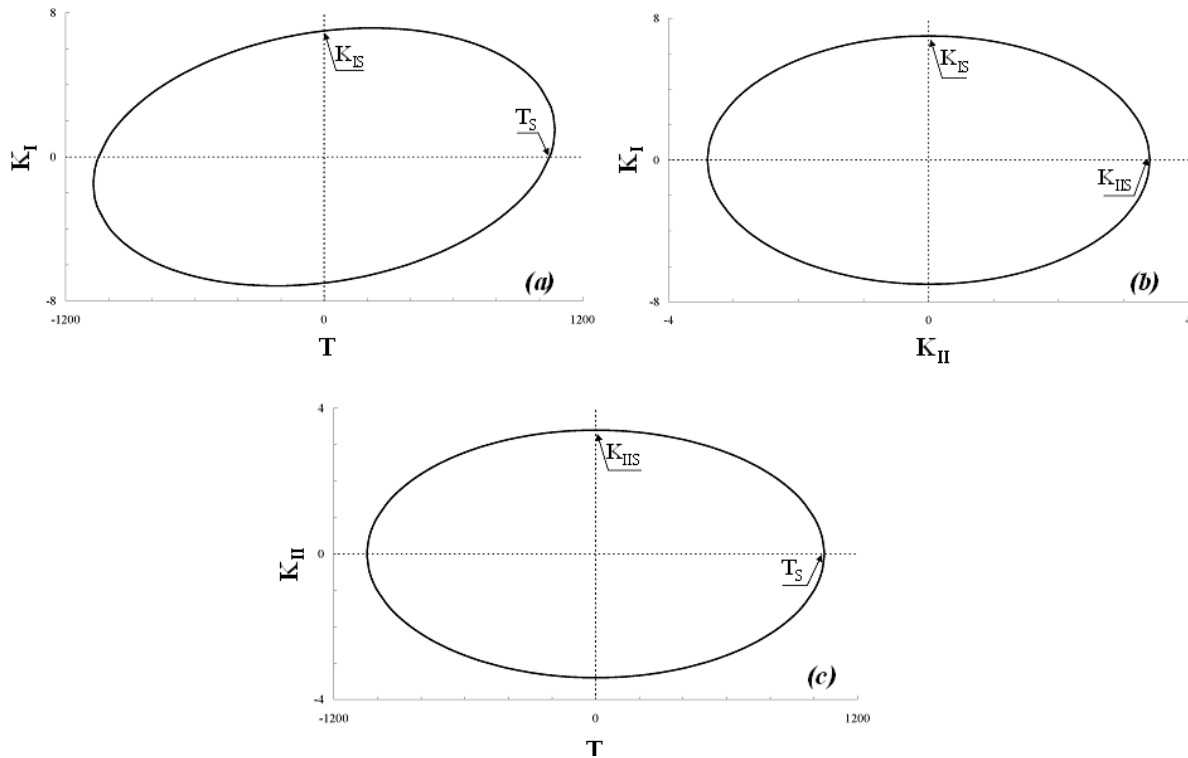


Figure 2-18 : Surface seuil du critère identifié pour l'acier 30NCD16  
(a) dans le plan  $(T, K_I)$  pour  $K_{II}=0$  (b) dans le plan  $(K_{II}, K_I)$  pour  $T=0$  (c) dans le plan  $(T, K_{II})$  pour  $K_I=0$ .

#### 2.3.4. Synthèse sur l'identification du critère

Le critère développé est un critère de non-propagation de fissure, construit à partir des champs de la mécanique linéaire de la rupture. Les défauts sont donc modélisés par des fissures, circulaires ou semi-circulaires, selon leur position dans la pièce. Il est alors possible d'exprimer les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  ainsi que la contrainte  $T$  en fonction d'une part du chargement et d'autre part de la taille de défaut.

Le seuil de non-propagation de ces fissures est basé sur le calcul d'une énergie élastique de cisaillement seuil sur un domaine de taille  $\delta$  situé en pointe de fissure.

On dénombre quatre variables (trois composantes du tenseur des contraintes et la taille de défaut) et trois paramètres matériau (le coefficient de Poisson  $\nu$ , le facteur d'intensité des contraintes seuil de non-propagation en mode I  $K_{IS}$  et la taille  $\delta$  du domaine d'intégration de l'énergie élastique de cisaillement).

Pour des petits défauts, on suppose que:

- Le seuil de non-propagation en traction uniaxiale correspond à la limite de fatigue du matériau.
- La sensibilité du critère à la biaxialité du chargement est identique à celle du critère de Dang Van.

Avec  $\nu$  et  $K_{IS}$  connus, ces deux hypothèses permettent d'identifier le paramètre  $\delta$ .

## 2.4.Applications

La réponse du modèle proposé pour différentes configurations va faire l'objet de ce paragraphe. Dans un premier temps on étudie dans quelle mesure le critère permet de reproduire l'effet de taille mis en évidence par Kitagawa et Takahashi, pour des chargements uniaxiaux ainsi que des chargements biaxiaux. L'influence du type de modélisation choisie pour le défaut est ensuite commentée, en particulier la position du défaut par rapport à la surface.

### 2.4.1. Effet de taille

#### 2.4.1.1. Chargement de traction uniaxiale

On cherche à déterminer l'évolution de la contrainte seuil de non-propagation en fonction de la taille de défaut dans le but de comparer ces résultats à ceux obtenus par Kitagawa et Takahashi [Kitagawa et al.,1976].

Les défauts sont assimilés à des fissures circulaires de rayon variable  $a$ . Les facteurs d'intensité des contraintes ainsi que la contrainte  $T$  sont donnés par l'équation (2-32). Il est alors nécessaire d'effectuer une hypothèse sur le plan de propagation de fissure afin d'exprimer les contraintes dans le repère de la fissure. On considère que les fissures se propagent dans le plan orthogonal à la contrainte principale maximale. Dans ce cas, l'expression du critère donnée par l'équation (2-27) se réduit à :

$$\left(\frac{K_I}{K_{IS}}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_S}\right)^2 + f_v \left(\frac{K_I}{K_{IS}}\right) \left(\frac{T}{T_S}\right) = 1 \quad (2-45)$$

Pour un chargement de traction uniaxiale  $\sigma$ , les contraintes dans le plan de fissure sont :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma \\ \sigma_t = 0 \\ \tau = 0 \end{cases} \quad (2-46)$$

En combinant les équations (2-32), (2-45) et (2-46), on peut alors déterminer la contrainte seuil de non-propagation en fonction de la taille de fissure. On reporte ce résultat dans un diagramme log-log (Figure 2-19) et on constate que l'on reproduit qualitativement le diagramme de Kitagawa-Takahashi : la contrainte seuil devient indépendante de la taille de fissure quand celle-ci tend vers zéro, et varie selon les lois de la mécanique linéaire de la rupture (MLR) quand le défaut est grand.

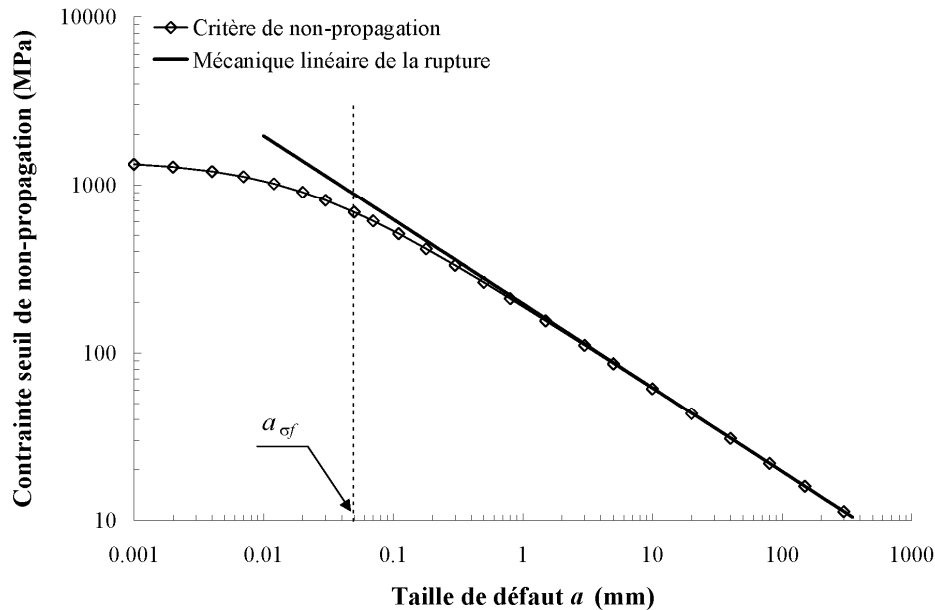


Figure 2-19 : Critère de non-propagation tracé dans le diagramme de Kitagawa et comparaison avec la mécanique linéaire de la rupture.

On constate cependant que lorsque la taille de défaut tend vers zéro, la contrainte seuil tend vers une valeur constante proche de 1400 MPa, ce qui est bien supérieur à la limite de fatigue du matériau. En fait, le critère a été identifié sous l'hypothèse que le matériau contient toujours des défauts, de dimension  $a_{\sigma_f}$  à la limite de fatigue  $\sigma_f$ . Par conséquent, la partie du diagramme correspondant à des tailles de défauts inférieures à  $a_{\sigma_f}$  n'est pas pertinente. Cela correspondrait à un matériau « parfait » qui ne contiendrait aucun défaut, pas même des grains.

Cependant, cela ne signifie pas que le modèle ne met pas en évidence un effet de taille pour des défauts de tailles supérieures à  $a_{\sigma_f}$ . Ainsi en Figure 2-20 est représenté un agrandissement du critère pour les tailles supérieures à  $a_{\sigma_f}$  dans un diagramme log-linéaire. L'écart entre le critère proposé et la mécanique linéaire de la rupture est de 190 MPa pour des tailles proches de  $a_{\sigma_f}$ , ce qui est loin d'être négligeable.

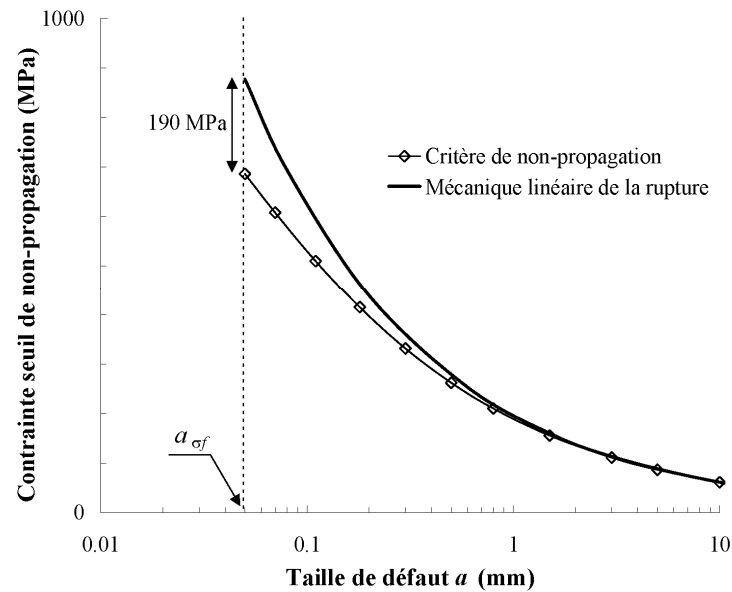


Figure 2-20 : Agrandissement du critère dans son domaine de validité. Comparaison avec la mécanique linéaire de la rupture.

Pour identifier le critère, nous avons vu que la limite de fatigue en traction n'était pas suffisante, et nous avons donc eu recours à la limite de fatigue en torsion pour identifier  $\delta$ .

Mais, comme la contrainte  $T$  permet d'introduire un effet de taille dans le critère, on pourrait s'attendre à un effet de la valeur de  $\delta$  sur la sensibilité du critère à la dimension des défauts. Sur la Figure 2-21, le critère est donc représenté, pour les diverses valeurs de  $\delta$  du tableau 2-2, en fonction de la dimension du défaut. On rappelle que  $\delta$  est égal à une fraction  $\varepsilon$  de la dimension caractéristique  $a_{\sigma_f}$  des défauts à la limite de fatigue  $\sigma_D$  (équation (2-36)). On constate que, dès lors que la validité des champs de la mécanique linéaire de la rupture est vérifiée ( $\varepsilon$  proche de 0.1), il n'y a presque pas d'effet de  $\delta$  sur la position du critère dans le diagramme de Kitagawa.

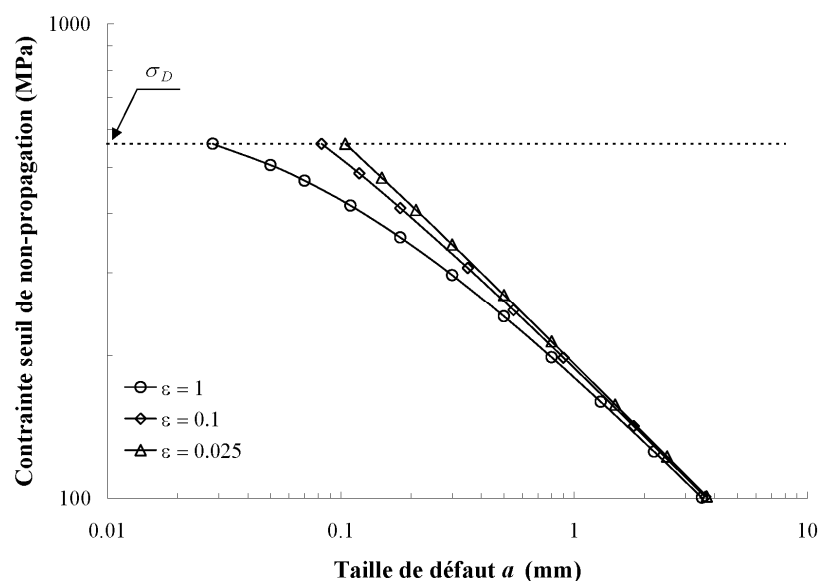


Figure 2-21 : Influence de  $\delta$  sur l'effet de taille dans le diagramme de Kitagawa-Takahashi.

### 2.4.1.2. Chargement biaxial

On considère maintenant un trajet de chargement allant d'un état non contraint (0,0) à un état biaxial ( $\sigma_1, \sigma_2$ ). Le critère est maintenant représenté dans le plan ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) pour diverses dimensions de défauts. Trois dimensions de défauts sont choisies: 49,15  $\mu\text{m}$  (qui correspond à  $a_{\sigma f}$ ), 500  $\mu\text{m}$  et 5 mm. Premièrement, la taille de défaut n'a aucune influence en bi-compression. En effet, dans ce cas la seule variable qui dépend de la dimension des défauts,  $K_I$ , est nulle. Cette partie correspond à une défaillance par plasticité généralisée.

A l'inverse, lorsque l'une des composantes principales du tenseur des contraintes est positive, la taille de défaut a un effet important sur le domaine de non-propagation, dont la taille tend vers zéro lorsque la taille de défaut augmente (Figure 2-22).

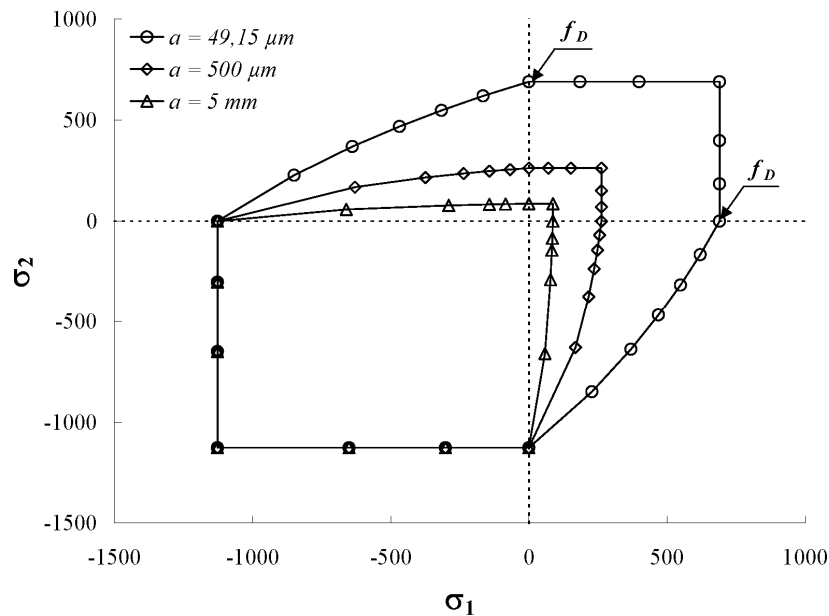


Figure 2-22 : Influence de la taille de défaut pour un chargement biaxial.

### 2.4.2. Influence de la position du défaut

Considérons comme précédemment un chargement biaxial ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) et une particule circulaire. Dans un premier cas, la particule est supposée être noyée dans le matériau et dans un second cas elle est située juste sous la surface. Dans le premier cas, le défaut est modélisé par une fissure circulaire. Dans le second cas, le défaut tend rapidement vers une fissure semi-elliptique : on le modélisera donc par une fissure semi-circulaire en surface. Pour ces deux configurations les valeurs de  $K_I$  et  $T$  sont connues.

Les seuils de non-propagation pour la fissure interne et la fissure surfacique ont été tracés dans le même diagramme (Figure 2-23). Ainsi que l'on pouvait s'y attendre, le domaine de non-propagation correspondant à la particule située sous la surface est contenu entièrement à

l'intérieur du domaine de non-propagation correspondant à la particule interne. Un défaut situé en surface est plus critique qu'un défaut interne de taille équivalente.

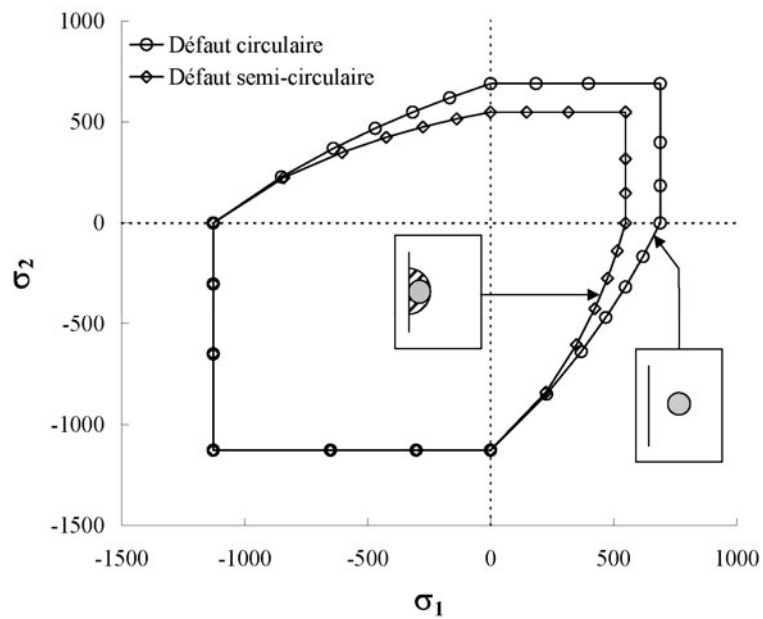


Figure 2-23 : Comparaison des frontières pour un défaut interne et un défaut surfacique de tailles équivalentes.



### 2.4.3. Synthèse sur l'implantation du critère de non-propagation

Le critère de fatigue proposé fait intervenir de manière explicite un paramètre représentatif du défaut. Le défaut est modélisé comme une fissure. La limite de fatigue correspond ici au seuil de non-propagation en mode I de cette fissure. Choisir le plan qui maximise  $K_I$  pour la fissure est analogue à la définition d'un plan critique.

Le critère de non-propagation proposé est une énergie élastique de cisaillement critique pour la région en pointe de fissure. Ainsi, lorsque toutes les contraintes principales sont négatives ou nulles,  $K_I$  est nul, et le critère est donc indépendant de la dimension des défauts et proche du critère de Von Mises.

Pour un chargement de traction uniaxiale,  $K_I$  est non nul et dépend de la dimension des défauts. Pour les grands défauts, le critère répond comme la mécanique linéaire de la rupture (MLR) ; la limite de fatigue est inversement proportionnelle à la racine carrée de la dimension des défauts. Par ailleurs, la prise en compte de la contrainte  $T$  dans le critère conduit à une saturation de la limite de fatigue lorsque la taille des défauts devient très petite. Dans le domaine de validité du critère ( $a > a_{\text{of}}$ ) l'écart entre la limite de fatigue calculée à partir de  $K_{IS}$  et de la MLR et la limite de fatigue calculée avec ce critère atteint 20% pour le 30NCD16.

Pour un chargement biaxial, et pour les très petits défauts la sensibilité du critère à la biaxialité du chargement est la même que celle du critère de Dang Van pour le matériau 30NCD16. Dès qu'une contrainte principale au moins est positive, les deux critères sont similaires.

Par ailleurs, la dimension du domaine de non-propagation des fissures évolue de manière cohérente avec la dimension des défauts ; plus le défaut est grand, plus la dimension du domaine est restreinte.

Le critère de non-propagation mis en place répond donc au cahier des charges que nous nous étions fixés et qui stipulait de développer un critère s'appliquant à une large gamme de dimensions de défauts et qui soit cohérent avec les méthodes actuelles, fondées sur la MLR pour les grands défauts et les modèles d'endurance multiaxiaux pour les méthodes déterministes.

La position du défaut dans la pièce est prise en compte au travers de la modélisation choisie pour celui-ci : fissure circulaire dans le cas d'un défaut interne et fissure semi-circulaire dans le cas d'un défaut surfacique. Le caractère pénalisant d'un défaut surfacique vis-à-vis d'un défaut équivalent interne est représenté correctement. Là encore, le cahier des charges est respecté : une formulation unique pour les défauts internes et surfaciques permettra de considérer les compétitions entre ces deux populations de défauts.

Le critère, à ce stade de l'étude, ne permet pas de représenter les effets de contrainte moyenne, puisque l'aspect cyclique du chargement n'est pas pris en compte.

## 2.5. Probabilisation du critère : prise en compte d'une distribution de tailles de défauts

Une des causes de la rupture par fatigue est la présence de défauts dans le matériau constitutif de la structure. Le caractère aléatoire de la présence de ces défauts dans le matériau peut donc être relié à la dispersion observée sur les durées de vie expérimentales. L'objectif principal de cette étude est de construire un modèle de fatigue probabiliste. A partir du critère de non-propagation mis en œuvre il est désormais facile de considérer différentes variables aléatoires caractéristiques des défauts. Dans ce paragraphe on détaillera la prise en compte d'une distribution de tailles de défauts.

On souhaite calculer la probabilité de rupture d'une structure soumise à un chargement donné. A cette fin, on se place dans le cadre de l'hypothèse du maillon faible : la rupture de la structure aura lieu dès lors qu'il y a rupture d'un élément de volume qui la compose, les éléments de volume étant supposés indépendants.

Le calcul de la probabilité de rupture de la structure passe donc en premier lieu par le calcul de la probabilité de rupture d'un élément de volume. Le critère de rupture adopté est l'*activation* d'un défaut dans l'élément de volume. Le seuil d'activation d'un défaut correspond au seuil de non-propagation déterminé par le critère, en intégrant la probabilité de présence de défauts.

### 2.5.1. Choix de la distribution de défauts

La population de défauts d'un matériau est caractérisée par sa **courbe de propreté**, c'est-à-dire la courbe permettant d'établir la probabilité de présence d'un défaut de taille supérieure ou égale à une taille donnée par unité de volume. Dans la pratique cette courbe de propreté peut avoir été déterminée, selon les matériaux, par retour d'expérience (Hard- $\alpha$  dans les alliages de Titane), par extraction et comptage d'inclusions présente dans un bain de métal fondu (superalliage MdP), à partir de coupes métallographiques...

La probabilité que les défauts du matériau soient de dimension supérieure ou égale à une dimension donnée est égale à un, lorsque cette dimension donnée est nulle, et la probabilité tend vers zéro lorsque la dimension du défaut augmente.

La courbe de propreté d'un matériau est identifiée pour un volume de matière donné, le **volume de référence**  $V_{ref}$ . On note  $dp(a)$  la distribution des dimensions de défaut. Par définition, la probabilité de trouver un défaut de dimension inférieure à une dimension donnée  $a_0$  dans ce volume  $V_{ref}$  s'écrit :

$$P_{V=V_{ref}}(a < a_0) = \int_{a=0}^{a=a_0} dp(a).da \quad (2-47)$$

En pratique, on souhaite pouvoir exprimer cette probabilité pour un **volume quelconque de matière**  $V_0$ . Supposons que l'on puisse décomposer ce volume de matière  $V_0$  en N fois le volume de référence  $V_{ref}$  :

$$V_0 = N \cdot V_{ref} \quad (2-48)$$

On ne trouvera pas de défaut de taille supérieure à  $a_0$  dans le volume  $V_0$  si l'on n'en trouve dans aucun des  $N$  volumes  $V_{ref}$  qui le constituent. La probabilité de trouver un défaut de taille inférieure à  $a_0$  dans le volume  $V_0$  est donc le produit des probabilités de trouver un défaut de taille inférieure à  $a_0$  dans les  $N$  volumes  $V_{ref}$  :

$$P_{V=V_0} (a < a_0) = \prod_{i=1}^N P_{V_i=V_{ref}} (a < a_0) \quad (2-49)$$

On suppose en outre que les défauts sont répartis de façon aléatoire dans la matière. La probabilité de trouver un défaut de taille donnée dans un volume de matière est donc la même quelle que soit la position du volume dans la structure. Les probabilités de survie des  $N$  volumes  $V_{ref}$  composant le volume  $V_0$  sont donc les mêmes :

$$P_{V=V_0} (a < a_0) = \left( P_{V=V_{ref}} (a < a_0) \right)^N \quad (2-50)$$

D'après les équations (2-47), (2-48) et (2-50), la probabilité de trouver un défaut de taille inférieure à une taille donnée  $a_0$  dans un volume de matière quelconque  $V_0$  s'exprime de la façon suivante en fonction de la distribution de tailles de défaut  $dp(a)$  identifiée sur le volume de référence  $V_{ref}$  :

$$P_{V=V_0} (a < a_0) = \left[ \int_{a=0}^{a=a_0} dp(a) \cdot da \right]^{V_0/V_{ref}} \quad (2-51)$$

Par la suite, on utilisera les notations suivantes :

- $dp(a)$  fera référence à la distribution de tailles de défaut identifiée sur le volume de référence  $V_{ref}$ .
- $dp_{V=V_0}(a)$  fera référence à une distribution de tailles de défauts pour un volume quelconque  $V_0$ .

On choisit pour les exemples d'application qui vont suivre, de modéliser la distribution de taille de défaut par une loi normale de moyenne  $a_m$  et d'écart-type  $s$ .

$$dp(a) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a-a_m)^2}{2s^2}\right) \quad (2-52)$$

### 2.5.2. Expression de la probabilité de rupture

On souhaite exprimer la probabilité de rupture d'une structure soumise à un chargement donné. A priori les contraintes sont non-uniformes dans la structure. On découpe donc la structure en éléments de volume et la probabilité de rupture de la structure complète sera déterminée à partir des probabilités de rupture de chacun de ces éléments de volume, sous couvert de l'hypothèse du maillon faible. En pratique, le découpage que l'on considérera sera le maillage éléments finis de la structure.

La **probabilité de rupture d'un élément de volume** est liée d'une part à la probabilité de présence de défauts dans cet élément de volume et d'autre part à la probabilité que ces défauts conduisent à la rupture. Considérons une taille de défaut  $a_i$ . La probabilité de rupture de l'élément de volume  $dV$  relativement à cette taille de défaut est donc le produit des probabilités des deux évènements suivants :

- Le défaut de taille  $a_i$  est présent dans le volume  $dV$  :  

$$P_{V=dV} \left( a \in \left[ a_i - \frac{da}{2}; a_i + \frac{da}{2} \right] \right) = dp_{V=dV}(a_i).da$$
- Le défaut de taille  $a_i$  mène à la rupture :  $P(\text{rupture} / a = a_i)$

Si l'on discrétise les tailles de défauts du matériau en intervalles disjoints, la probabilité de rupture de l'élément de volume  $dV$  est alors la somme des probabilités de rupture relativement à chaque taille de défaut :

$$P_R(dV) = \sum_{a_i=0}^{+\infty} (P(\text{rupture} / a = a_i) \times dp_{V=dV}(a_i).da) \quad (2-53)$$

La probabilité qu'un défaut de taille  $a_i$  mène à la rupture – notée  $P(\text{rupture}/a=a_i)$  – est déterminée à partir du critère de non-propagation mis en œuvre au paragraphe 2.2. Comme on l'a précisé précédemment, on entend par rupture de l'élément de volume la propagation d'un défaut pour un chargement donné de cet élément de volume. Connaissant le chargement appliqué ainsi que la taille de défaut  $a_i$ , il reste à statuer sur l'orientation du défaut – qui détermine le plan de propagation – pour pouvoir appliquer le critère (on rappelle que les composantes du tenseur des contraintes utilisées dans le critère sont projetées sur le plan de fissuration). L'orientation d'un défaut est définie par la normale  $\underline{n}$  au plan de propagation ainsi que par le vecteur  $\underline{t}$  dans ce plan qui détermine le point du front de fissure où l'on évalue le critère. Dans un premier temps, nous supposons que les orientations sont équiprobables. On aura rupture dès lors que l'on dépasse le critère pour une orientation :

$$P(\text{rupture} / a = a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall(\underline{n}, \underline{t}), \text{Critère}(a_i, \sigma(\underline{n}, \underline{t})) < 1 \\ 1 & \text{si } \exists(\underline{n}, \underline{t}), \text{Critère}(a_i, \sigma(\underline{n}, \underline{t})) \geq 1 \end{cases} \quad (2-54)$$

Pour chaque taille de défaut  $a_i$  on est donc amené à déterminer s'il existe une orientation de fissure telle que le chargement projeté dans le repère de la fissure conduise à dépasser le seuil prévu par le critère de non-propagation. Plus les discrétisations des tailles de défauts et des orientations sont fines, plus le calcul est précis, mais aussi coûteux...

A partir de l'expression du critère, il est possible de déterminer la plus petite taille de défaut qui propage pour un chargement donné et une orientation particulière. En effet, on a vu que le critère s'exprimait en fonction du chargement dans le repère de la fissure, et de la taille de cette fissure (équation (2-35)). Lorsque le seuil de propagation est atteint, la taille de fissure critique est solution de l'équation suivante :

$$a \left( \frac{\pi Y_1^2 \sigma_n^2}{K_{1S}^2} + \frac{\pi Y_2^2 \tau^2}{K_{2S}^2} \right) + \sqrt{a} \left( \frac{\sqrt{\pi} f_v Y_1 \sigma_n (\sigma_t - Y_t \sigma_n)}{K_{1S} T_S} \right) + \left( \frac{(\sigma_t - Y_t \sigma_n)^2}{T_S^2} - 1 \right) = 0 \quad (2-55)$$

On boucle sur tous les plans de l'espace, les orientations de fissures étant considérées équiprobables (cas des défauts sphériques, par exemple). Cela nous permet de déterminer la plus petite taille de défaut qui propage pour un chargement donné, quelle que soit l'orientation de la fissure. Cette taille critique sera notée  $a_{cmin}$ . Ainsi une fissure de taille inférieure à  $a_{cmin}$  ne se propagera pas.

Le calcul de la taille critique  $a_{cmin}$  apparente le critère à un critère de type plan critique. Pour s'affranchir des problèmes liés à la détermination du plan critique, on pourra effectuer un cumul des probabilités de rupture sur chaque orientation.

Dans le cas présent, nous supposons que la probabilité de rupture dépend de la taille critique  $a_{cmin}$ , et l'équation (2-54) se simplifie par :

$$P(\text{rupture} / a = a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i < a_{cmin} \\ 1 & \text{si } a_i \geq a_{cmin} \end{cases} \quad (2-56)$$

Si l'on combine les équations (2-53) et (2-56), et que l'on prend un pas de discrétisation de la taille de défaut  $da$  suffisamment petit, la probabilité de rupture d'un élément de volume  $dV$  se réduit alors à :

$$P_R(dV) = \int_{a=a_{cmin}}^{a=+\infty} dp_{V=dV}(a).da \quad (2-57)$$

Par définition, en considérant l'équation (2-57), la probabilité de rupture de l'élément de volume  $dV$  est alors la probabilité de trouver un défaut de taille supérieure à la taille critique  $a_{cmin}$  dans le volume  $dV$  :

$$P_R(dV) = P_{V=dV}(a \geq a_{cmin}) \quad (2-58)$$

A partir de l'équation (2-51), on peut alors écrire la **probabilité de rupture d'un élément de volume  $dV$**  en fonction de la distribution de tailles de défaut identifiée pour le matériau sur le volume de référence :

$$P_R(dV) = 1 - \left( \int_{a=0}^{a=a_{cmin}} dp(a).da \right)^{dV/V_{ref}} \quad (2-59)$$

Connaissant la probabilité de rupture d'un élément de volume, on en déduit la **probabilité de rupture de la structure** d'après l'hypothèse du maillon le plus faible :

$$P_R(V) = 1 - \prod_{dV} \left[ \left( \int_{a=0}^{a=a_{cmin}} dp(a).da \right)^{dV/V_{ref}} \right] \quad (2-60)$$

Le processus de calcul de la probabilité de rupture est résumé sur la Figure 2-24 :

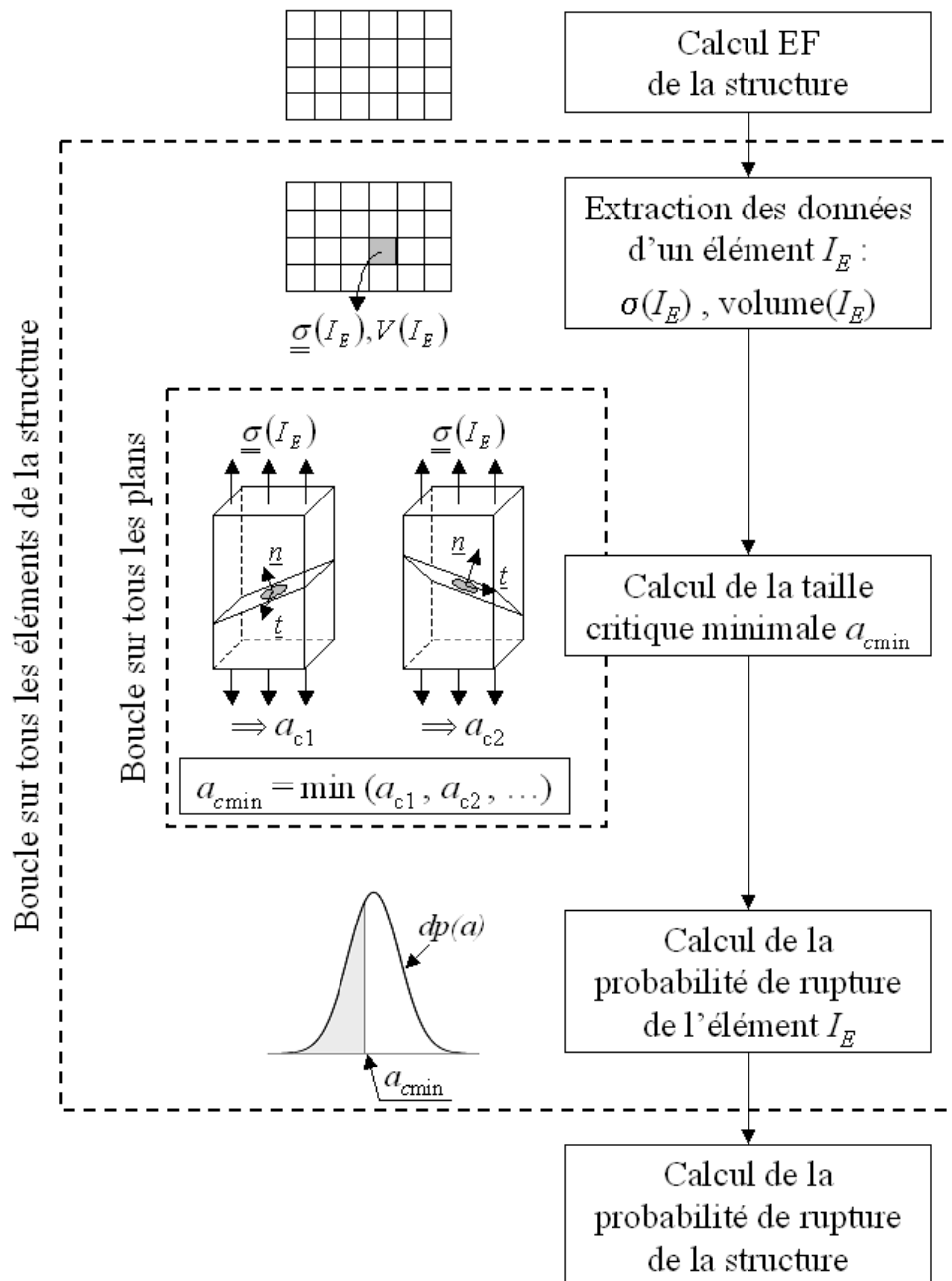


Figure 2-24 : Processus de calcul de la probabilité de rupture.

### 2.5.3. Vérification de l'implantation du modèle probabiliste

Afin d'illustrer l'approche probabiliste proposée, on considère une plaque trouée soumise à un chargement de traction uniaxiale. Différentes études sont réalisées :

- Etude de la convergence numérique de la probabilité de rupture.
- Etude de l'influence de la dimension du trou (effet de gradient de contrainte).
- Etude de l'influence de la forme du trou (effet de concentration de contrainte).

On va considérer deux géométries différentes de plaque trouée. Dans les deux cas, il s'agit d'une plaque carrée de côté  $c$  située dans le plan  $(x,y)$ , à laquelle on impose une sollicitation de traction suivant l'axe  $y$  via un déplacement  $u$  sur les côtés  $y=0$  et  $y=c$  (les côtés  $x=0$  et  $x=c$

sont laissés libres). Les deux cas tests se différencient par la géométrie du trou situé au milieu de la plaque :

- Trou circulaire de rayon  $a$  (Figure 2-25.a).
- Trou elliptique de demi-grand axe  $a$  sur l'axe  $x$  et de demi-petit axe  $b$  sur l'axe  $y$  (Figure 2-25.b)

Pour des raisons évidentes de symétrie, seul un quart de la structure est modélisé. Les éléments finis choisis sont des éléments triangles linéaires.

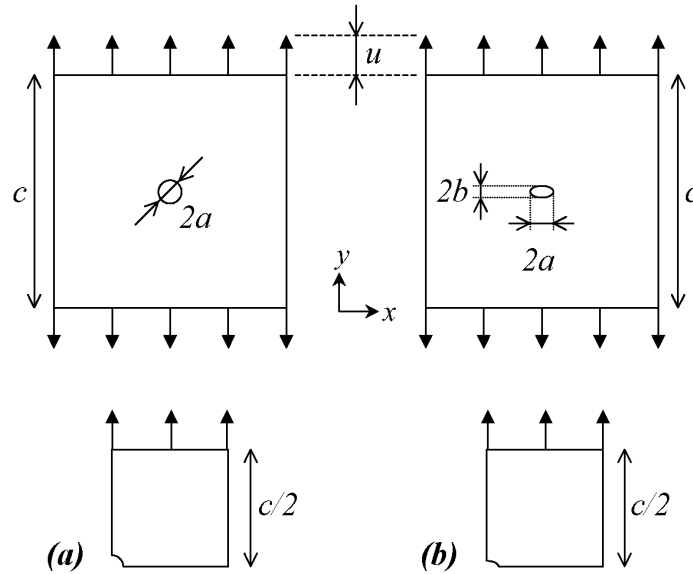


Figure 2-25 : Géométrie de la plaque trouée sollicitée en traction  
(a) trou circulaire (b) trou elliptique

On prendra une plaque de côté  $c=10000\text{mm}$ , l'ordre de grandeur de la taille du trou étant de la dizaine de millimètres. De cette façon, on peut considérer la plaque comme « infinie » par rapport au trou.

Le matériau choisi pour les cas tests présentés est élastique et isotrope. Il s'agit de l'acier 30NCD16 dont les caractéristiques sont données dans le Tableau 2-1.

La présence d'un trou dans la plaque entraîne le phénomène bien connu de concentration de contrainte au niveau de l'intersection entre le trou et l'axe  $x$ . Le maillage devra donc être suffisamment fin à ce niveau pour tenir compte du fort gradient de contrainte de la région. Si l'on note  $\sigma_\infty$  la contrainte en bord de plaque ( $y=c$ ), alors la contrainte en bord de trou  $\sigma_{\max}$  sera égale à :

$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_\infty \quad (2-61)$$

$K_t$  est le facteur de concentration de contraintes. Il dépend de la géométrie du trou. Pour des pièces simples en traction, il s'exprime de la façon suivante en fonction du rayon de courbure  $\rho$  et de la demi-longueur  $l$  de l'entaille :

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{l}{\rho}} \quad (2-62)$$

Pour les géométries d'entailles considérées – à savoir circulaires et elliptiques – on a donc :

$$K_{t\text{ circulaire}} = 3 \quad (2-63)$$

$$K_{t\text{ elliptique}} = 1 + \frac{2a}{b} \quad (2-64)$$

La finesse du maillage sera caractérisée par le rapport  $(a/h)$  entre la dimension du trou  $a$  et la taille de l'élément situé en bord de trou  $h$ . On considérera le maillage suffisamment fin dès lors que la relation (2-61) est vérifiée et que le gradient de contrainte dans la région du bord de trou est correctement représenté (saut de contraintes entre deux éléments voisins faible).

### 2.5.3.1. Etude préalable de convergence numérique

Dans un premier temps on considère un trou circulaire de rayon  $a=5\text{mm}$  (Figure 2-25.a) et on applique une **déformation de 0.1%** à la plaque ( $u=5\text{mm}$ ). Dans ce cas, la contrainte en bord de plaque est égale à  $\sigma_{\infty}=200\text{MPa}$ . Pour un maillage suffisamment fin, la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  à l'intersection du bord du trou et de l'axe  $x$  (équations (2-61) et (2-63)) doit être trouvée égale à **600MPa**.

#### Etude de l'influence de la discrétisation numérique de la distribution de défauts en taille et en orientation :

Le calcul de la probabilité de rupture nécessite de déterminer la plus petite taille de défaut critique en passant en revue toutes les orientations possibles de défaut et tous les points du front de fissure. On choisit de repérer les orientations de l'espace par les angles d'Euler, dont la définition est rappelée Figure 2-26.

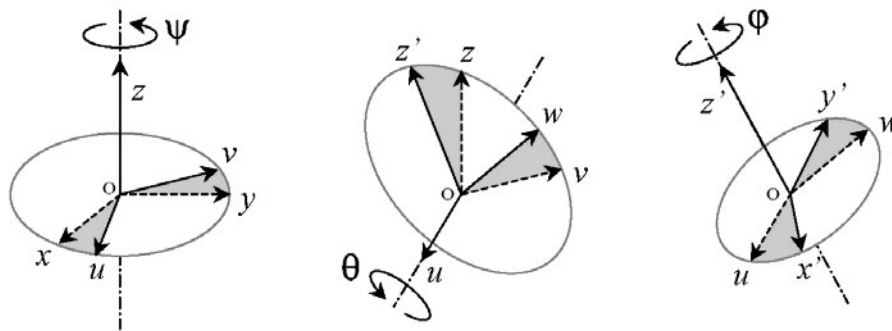


Figure 2-26 : Définition des angles d'Euler pour passer du repère  $(Oxyz)$  au repère  $(Ox'y'z')$

Les angles d'Euler permettent de passer du référentiel fixe  $(Oxyz)$  à un référentiel quelconque  $(Ox'y'z')$  par trois rotations successives. A partir d'un plan de normale  $z$  on définit ainsi un nouveau plan de normale  $z'$ . Les angles de précession  $\psi$  et de nutation  $\theta$  suffisent à repérer la normale  $z'$ , tandis que l'angle de rotation propre  $\phi$  permet de positionner le repère  $(x', y')$  dans le nouveau plan de normale  $z'$ .

Ainsi les angles  $\psi$  et  $\theta$  permettent de caractériser l'orientation du défaut considéré et l'angle  $\phi$  détermine le point du front de fissure où l'on évalue le critère. Pour définir tous les plans de



l'espace, il suffit que le vecteur  $z'$  décrive une demi-sphère. On fera donc varier les angles  $\psi$  et  $\theta$  entre 0 et  $\pi$ , tandis que l'angle  $\phi$  variera entre 0 et  $2\pi$ .

Pour calculer la probabilité de rupture, on utilise une approche numérique qui nécessite de discrétiser les angles d'Euler, ainsi que les tailles de défaut. L'objet de ce paragraphe est d'évaluer l'influence des paramètres de discrétisation utilisés :

- Le nombre de points contenu dans l'intervalle de variation des trois angles d'Euler utilisés pour repérer les orientations des plans de fissuration dans l'espace :  $d\psi$ ,  $d\theta$ ,  $d\phi$ . En pratique, on prendra  $d\psi = d\theta$ .
- Le pas de discrétisation des tailles de défaut :  $da$

On réalise un maillage relativement grossier du quart de plaque modélisé (574 éléments, 328 nœuds), le ratio caractéristique de la finesse du maillage étant  $a/h=0,81$  (Figure 2-27). La contrainte obtenue en bord de trou est alors de 414 MPa. Le calcul éléments finis réalisé ne converge donc pas vers la solution attendue qui est de 600MPa (équation (2-61)).

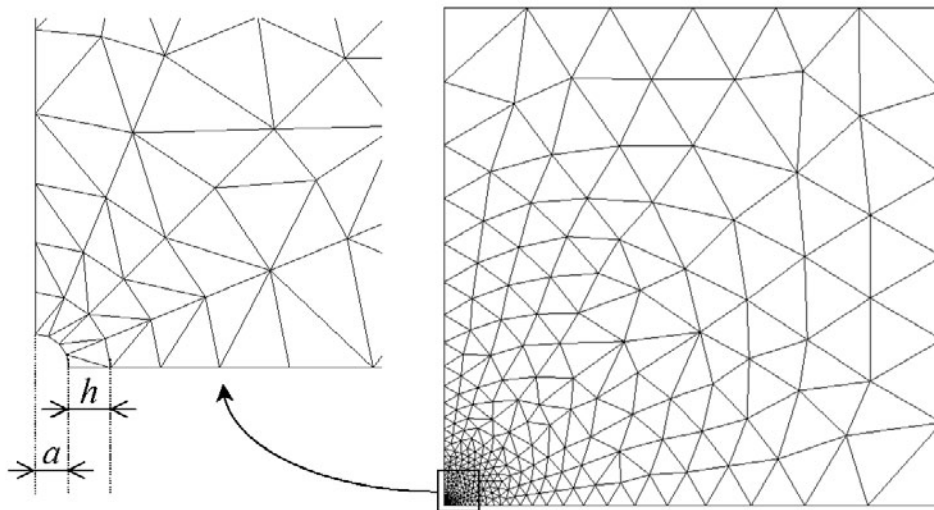


Figure 2-27 : Maillage de la plaque trouée

Concernant la distribution de défauts, on considère une loi normale (équation (2-52)) de moyenne  $a_m=400\mu\text{m}$  et d'écart type  $s=40\mu\text{m}$ . De la façon dont est programmé le calcul de la probabilité de rupture, on boucle une seule fois sur toutes les tailles de défaut, et l'on a calculé au préalable la taille critique. C'est une étape très peu coûteuse en temps, et par conséquent le fait de raffiner ou non la discrétisation de la distribution de défauts n'influe pas sur le temps de calcul total. On prendra donc par la suite un pas de discrétisation des tailles de défaut  $da=1\mu\text{m}$ .

On réalise un premier calcul avec un pas de discrétisation des angles d'Euler  $d\psi = d\theta = d\phi = \frac{\pi}{90}$ . On obtient une probabilité de rupture pour le quart de plaque modélisé de valeur  $P_R=0,288$  qui constituera notre référence. Ce niveau de discrétisation nécessite un peu plus de deux heures de calcul. Pour un maillage aussi grossier, ce temps de calcul est beaucoup trop élevé, on va donc augmenter le pas de discrétisation des angles d'Euler et étudier l'influence sur la probabilité de rupture calculée.

On fixe une discrétisation pour l'angle  $\varphi$ , et on fait varier la discrétisation sur les angles  $\psi$  et  $\theta$ . On compare alors le résultat obtenu à la probabilité de rupture vers laquelle on doit converger qui est  $P_R=0,288$  (Figure 2-28). On réalise cette opération pour quatre discrétisations de l'angle  $\varphi$  :

- 90 points de discrétisations sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  :  $d\varphi = \pi/45$
- 43 points de discrétisations sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  :  $d\varphi = 2\pi/43$
- 20 points de discrétisations sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  :  $d\varphi = \pi/10$
- 7 points de discrétisations sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  :  $d\varphi = 2\pi/7$

Les pas de discrétisation choisis sont tels qu'il n'y aura pas de points communs pour deux discrétisations différentes.

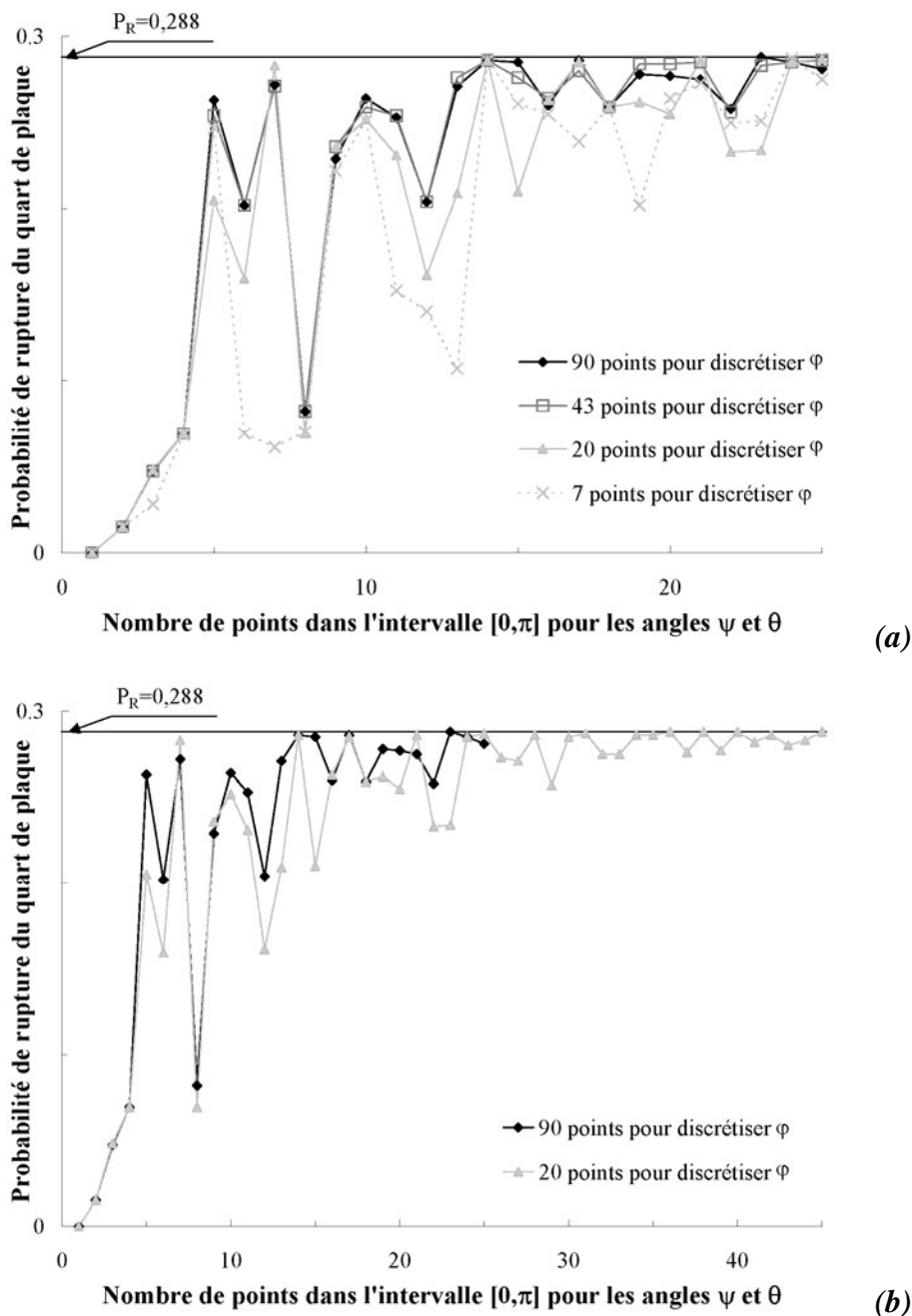


Figure 2-28 : Influence de la discrétisation des angles d'Euler sur la probabilité de rupture calculée

On constate que l'on converge vers la valeur de probabilité de rupture souhaitée en oscillant. Les oscillations sont d'autant plus prononcées que le nombre de points pour  $\varphi$  est petit, notamment pour  $d\varphi = 2\pi/7$  (Figure 2-28.a). Il semble que 20 points sur l'intervalle de variation de  $\varphi$  soit une discrétisation suffisante, et dans ce cas, à partir de 30 points sur l'intervalle de variation de  $\psi$  et  $\theta$ , les oscillations vers la valeur de probabilité de rupture souhaitée sont contenues dans un intervalle acceptable (erreur inférieure à 5%). Pour une telle discrétisation, les temps de calcul sont alors acceptables : 45 minutes pour un modèle de 19000 éléments.

Les paramètres retenus pour la suite des calculs sont consignés dans le Tableau 2-4.

$da$ [ $\mu\text{m}$ ]	$d\psi, d\theta$ [rad]	$d\varphi$ [rad]
1	$\pi/30$	$\pi/10$

Tableau 2-4 : Paramètres de calcul de la probabilité de rupture

### Etude de l'influence de la discrétisation spatiale : convergence du calcul éléments finis et de la probabilité de rupture :

On va étudier l'influence du maillage sur le résultat du calcul élément fini d'une part, et sur la probabilité de rupture de la structure d'autre part. Pour cela, nous considérons la même plaque que précédemment, contenant un trou circulaire de rayon  $a=5\text{mm}$  à laquelle on applique une sollicitation de traction telle que  $\sigma_{\infty}=200\text{MPa}$ . La solution du calcul éléments finis doit alors converger vers une contrainte maximale  $\sigma_{\max}=600\text{MPa}$  à l'intersection du bord du trou et de l'axe  $x$  (équations (2-61) et (2-63)).

Nous avons réalisé huit maillages, en diminuant progressivement la taille des éléments proches du trou de façon à faire tendre le ratio caractéristique de la finesse du maillage ( $a/h$ ) vers zéro (Figure 2-29).

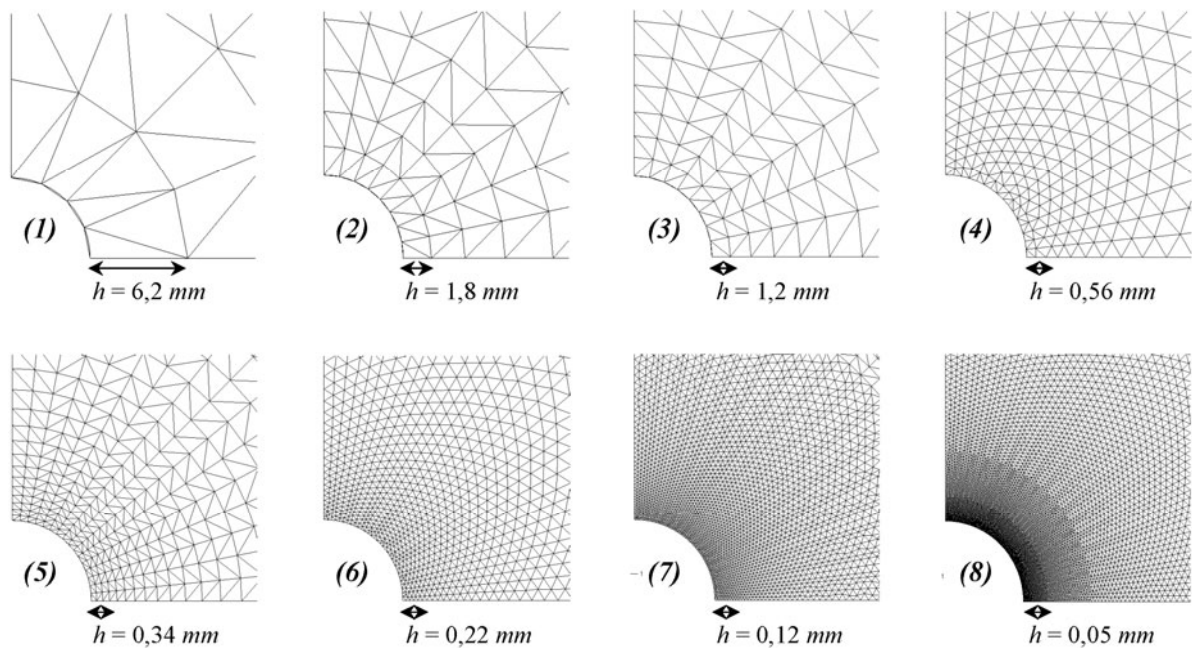


Figure 2-29 : Maillages en bord de trou de rayon  $a=5\text{mm}$  réalisés pour étudier la convergence du calcul éléments finis et de la probabilité de rupture

On considère la solution obtenue pour le huitième maillage comme la solution de référence. On calcule alors l'écart relatif entre la valeur obtenue pour les autres maillages et celle obtenue sur le huitième maillage, pour la contrainte maximale en bord de trou et pour la probabilité de rupture, et on trace cet écart en fonction du ratio ( $a/h$ ) (Figure 2-30).

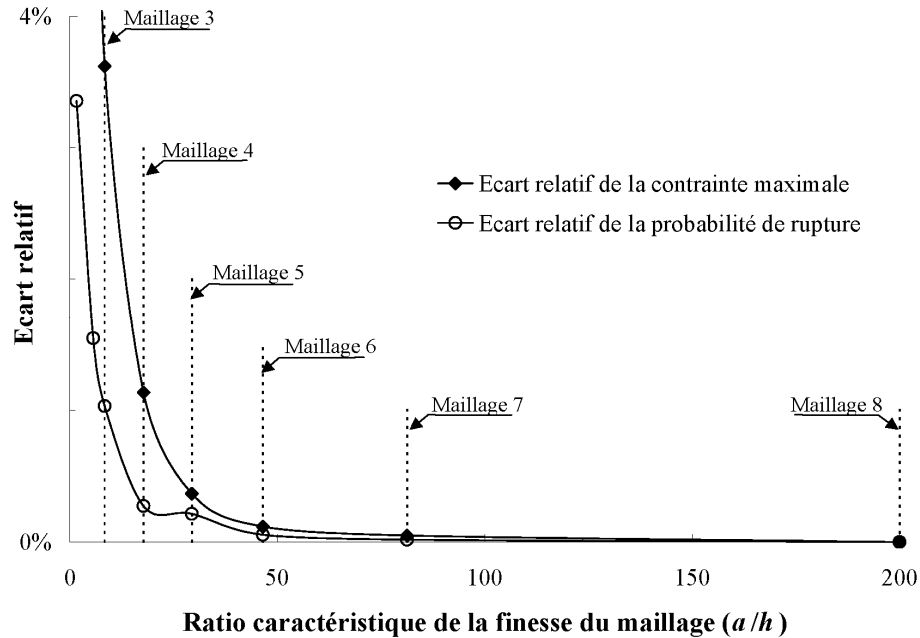


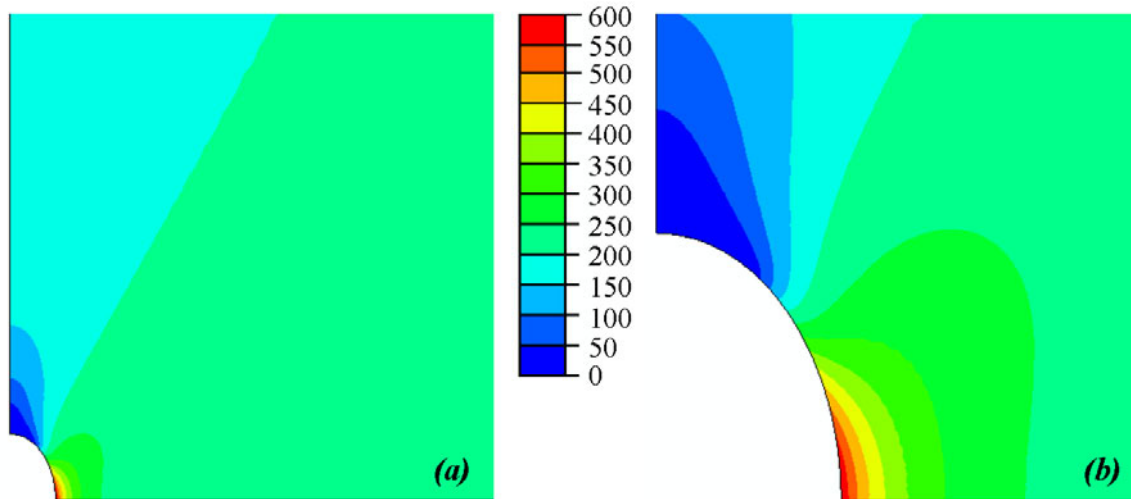
Figure 2-30 : Evolution de l'écart relatif entre la solution calculée et la solution de référence en fonction du maillage

On constate que la probabilité de rupture converge beaucoup plus vite que le calcul élément finis. Pour le maillage le plus grossier, l'écart relatif entre la probabilité de rupture calculée et la valeur de référence est inférieur à 4% tandis que cet écart reste de 30% sur la contrainte maximale.

### 2.5.3.2. Effet de gradient

L'étude préalable de convergence ayant été menée, on souhaite désormais vérifier que notre modèle probabiliste est à même de tenir compte d'un gradient de contrainte. La population de défauts est modélisée par une loi normale de moyenne 400  $\mu\text{m}$  et d'écart type 40  $\mu\text{m}$ .

Dans un premier temps, on compare les probabilités de rupture de deux plaques trouées, l'une avec un trou circulaire de rayon  $a=5\text{mm}$ , l'autre avec un trou circulaire de rayon  $a=20\text{mm}$ . Les deux trous étant circulaires, les facteurs de concentration de contraintes sont les mêmes (équation (2-63)). Les gradients de contraintes obtenus en bord de trou sont donnés par la Figure 2-31.



**Figure 2-31 : Gradient de la composante maximale de la contrainte principale**  
**(a) en bordure de trou de rayon  $a=5\text{mm}$  (b) en bordure de trou de rayon  $a=20\text{mm}$**

Comme le problème est homothétique, plus le rayon du trou est grand, plus le volume de matière soumis à une contrainte supérieure à  $\sigma_\infty$  est grand. Cela se traduit naturellement en terme de probabilité de rupture : la probabilité de rupture de la plaque avec un trou de rayon  $a=5\text{mm}$  doit être inférieure à la probabilité de rupture de la plaque avec un trou de rayon  $a=20\text{mm}$  (Tableau 2-5).

	<b>Plaque avec un trou de rayon <math>a = 5\text{mm}</math></b>	<b>Plaque avec un trou de rayon <math>a = 20\text{mm}</math></b>
<b>Probabilité de rupture</b>	0,295	0,674

**Tableau 2-5 : Influence du gradient de contrainte sur la probabilité de rupture**

Cet effet du gradient de contraintes sur la probabilité de rupture est à rapprocher des hypothèses de volume d'influence retenue par certains auteurs [Morel et al.,2002] pour tenir compte des effets d'échelles dans un critère de fatigue. On observe sur la Figure 2-31.b une augmentation du volume d'influence (volume pour lequel le critère de fatigue est dépassé), ce qui conduit naturellement à une augmentation de la probabilité de rupture.

Dans un deuxième temps, on étudie l'influence du gradient de contrainte en fonction de l'évolution du facteur de concentration de contraintes. On considère six plaques trouées par des trous elliptiques, de même longueur  $a=5\text{mm}$ , et de hauteurs  $b$  différentes. Lorsque le facteur de concentration de contraintes augmente, la contrainte maximale en bord de trou augmente en conséquence (équations (2-61) et (2-64)). Mais dans le même temps, le volume de matière soumis à une contrainte supérieure à  $\sigma_\infty$  diminue. Finalement, on constate que la probabilité de rupture décroît lorsque le facteur de concentration de contraintes croît (Figure 2-32) et semble tendre vers une valeur asymptotique. De façon similaire, Billaudeau et col. [Billaudeau et al.,2004] ont observé expérimentalement que pour un facteur de concentration de contraintes supérieur ou égal à 2, la limite de fatigue ne dépendait plus de la forme du défaut mais seulement de sa taille.

	Trou elliptique $a = 5mm$ $b = 2a$	Trou elliptique $a = 5mm$ $b = a$	Trou elliptique $a = 5mm$ $b = 3a/4$	Trou elliptique $a = 5mm$ $b = 5a/8$	Trou elliptique $a = 5mm$ $b = a/2$	Trou elliptique $a = 5mm$ $b = 3a/8$
$K_t$	2	3	3,67	4,2	5	6,3
Probabilité de rupture	0,300	0,295	0,293	0,292	0,291	0,289

Tableau 2-6 : Influence du facteur de concentration de contrainte et du gradient de contraintes associé sur la probabilité de rupture

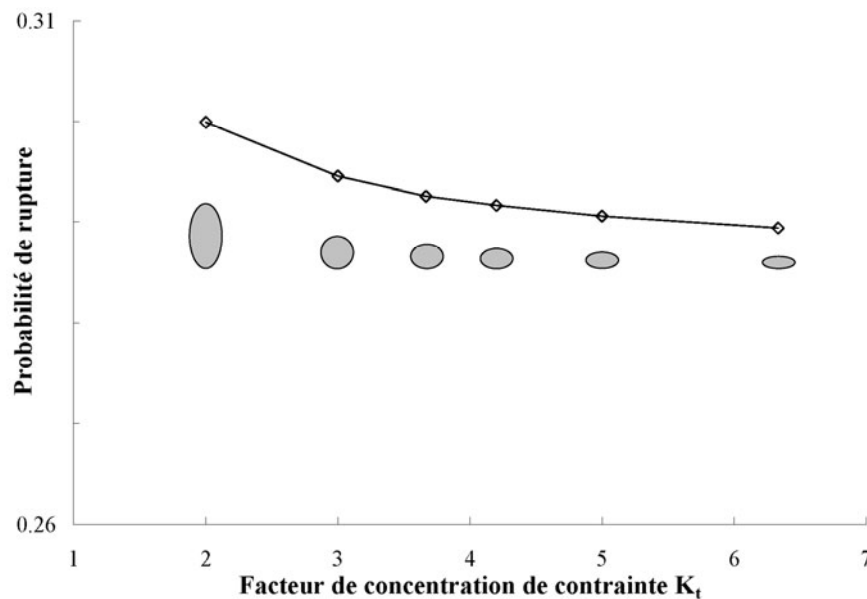


Figure 2-32 : Evolution de la probabilité de rupture en fonction du facteur de concentration de contrainte en bord de trou

Une approche probabiliste basée sur l'hypothèse du maillon faible permet ainsi de prendre en compte des modèles éléments finis comportant des gradients de contraintes importants :

- Pour une même contrainte maximale en un point donné, si gradient de contrainte augmente, la probabilité de rupture diminue.
- Pour une même dimension de défaut, la probabilité de rupture diminue lorsque le  $K_t$  augmente et tend vers une valeur asymptotique qui dépend de la dimension du défaut.

### 2.5.3.3. Illustration : effet de la position de la dimension moyenne des défauts dans le diagramme de Kitagawa-Takahashi.

Afin de visualiser la prise en compte par le modèle probabiliste de l'effet de taille de défaut sur la limite d'endurance du diagramme de Kitagawa et Takahashi, on considère ici le cas particulier d'un élément de volume en traction uniaxiale. Par ailleurs, deux distributions de défauts sont choisies, qui ont le même écart-type relativement à la moyenne, mais qui sont centrées respectivement en  $1 \mu m$  et  $1 mm$  (cf Tableau 2-7), et on calcule les densités de probabilité de rupture associées.

	Distribution 1	Distribution 2
$a_m$ [mm]	0.001	1
$s$ [mm]	$a_m/10$	$a_m/10$

Tableau 2-7 : Paramètres des distributions de défauts utilisées.

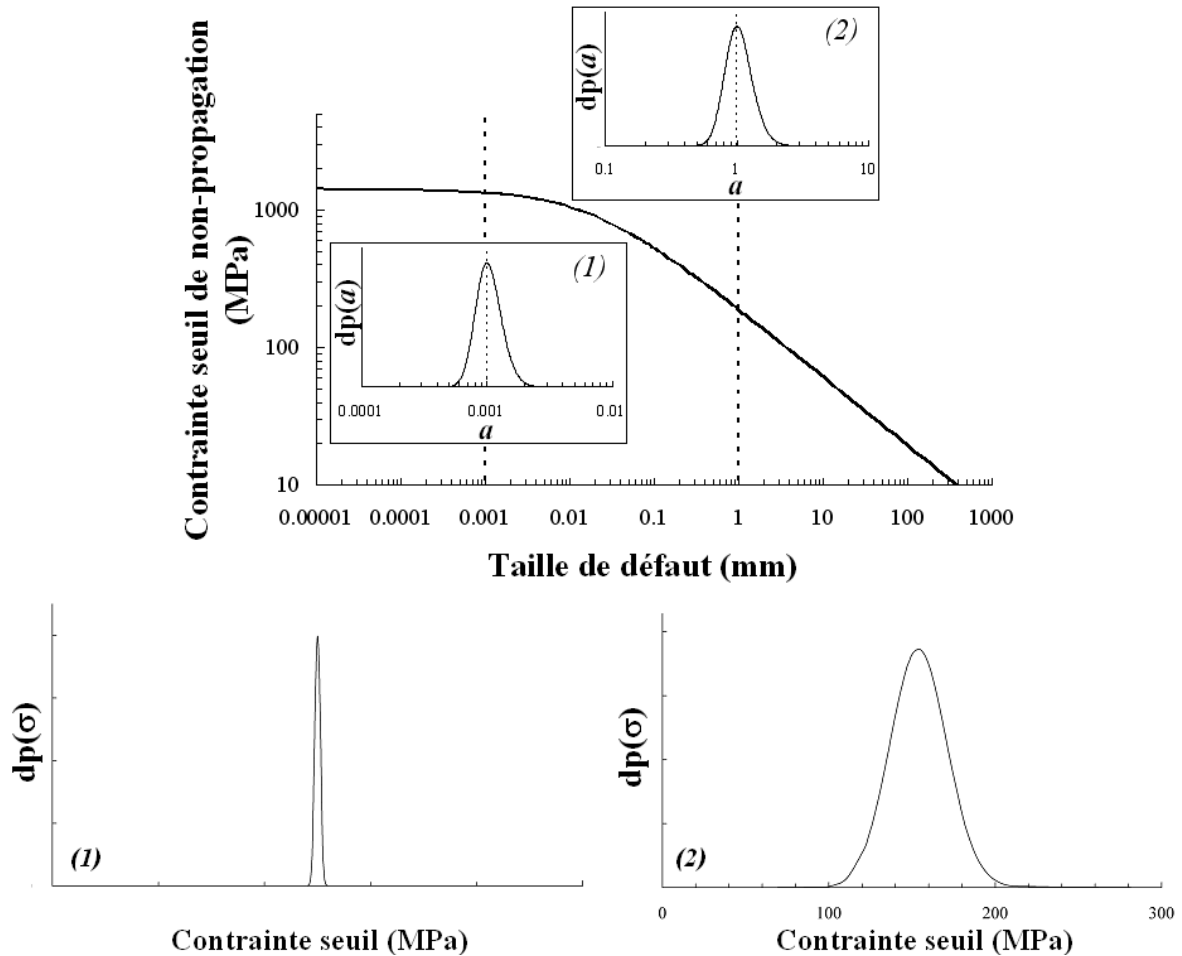


Figure 2-33 : Densité de probabilité de contrainte à rupture pour un chargement de traction uniaxiale, matériau 30NCD16.

On constate que pour une largeur donnée de la distribution de tailles de défauts, la largeur de la distribution des contraintes de non-propagation calculées avec le critère varie selon la position de la moyenne des tailles de défaut dans le diagramme de Kitagawa (Figure 2-33). Si la distribution de défauts se situe dans le domaine où la limite de fatigue est insensible à la taille de défaut, alors la largeur de la distribution des contraintes seuil tendra vers zéro. On observe l'effet inverse lorsque la distribution de défauts se situe dans le domaine des grands défauts.

#### 2.5.4. Synthèse de la probabilisation du critère

Le caractère probabiliste est introduit dans le critère de non-propagation proposé ici via une distribution de dimensions de défauts. Cette approche est analogue à celles employées par d'autres auteurs pour développer des modèles probabilistes basés sur une approche directe présentés au chapitre 1.

La probabilité de rupture de la structure est calculée à partir de l'hypothèse du maillon faible. La dimension de défaut est distribuée selon une loi normale. Les défauts sont assimilés à des fissures pour lesquelles les orientations sont équiprobables. Toutes les orientations de défauts sont considérées. En première approche, on détermine une taille de défaut critique minimale, ce qui revient à déterminer un plan critique. Par la suite, on pourra lever le problème posé par la détermination du plan critique en cumulant les probabilités de rupture sur toutes les orientations.

Une application à une plaque trouée nous a permis de vérifier l'implantation numérique de ce modèle probabiliste dans la chaîne de calcul de SNECMA. Une fois que la convergence numérique du calcul par éléments finis est obtenue, la probabilité de rupture pour chaque élément est calculée et le cumul est réalisé via l'hypothèse du maillon faible. Les effets d'échelles sont bien représentés. Pour un problème homothétique, plus le volume sollicité est grand plus la probabilité de rupture est grande. Par ailleurs, à même contrainte à l'infini et pour une même dimension de trou, plus le  $K_t$  est grand et plus la probabilité de rupture diminue.

Les temps de calculs qui restent longs sont néanmoins compatibles avec les applications industrielles.

Enfin, on a montré que la distribution de défaut n'a pas le même effet selon le domaine où elle se trouve dans le diagramme de Kitagawa et Takahashi. Si les défauts sont distribués autour d'une dimension pour laquelle la limite de fatigue est relativement indépendante de la taille des défauts, alors la largeur de la distribution des contraintes de non-propagation tend vers zéro. On observe l'effet inverse lorsque la distribution de défauts se situe dans le domaine des grands défauts sur le diagramme de Kitagawa.





### 3. ENRICHISSEMENT DU MODELE PROBABILISTE : PRISE EN COMPTE DE L'HETEROGENEITE DES PROPRIETES MECANQUES LOCALES

La distribution de taille et de présence des défauts ne suffit pas toujours à caractériser la dispersion des durées de vie obtenue expérimentalement. Il est alors nécessaire d'identifier d'autres sources de dispersion dans le phénomène de rupture par fatigue.

Les matériaux considérés sont des matériaux polycristallins. La réponse à un chargement de chacun des grains diffère en fonction de l'orientation de ce grain. Ainsi, lorsque l'on se place à l'échelle de la microstructure, on observe une hétérogénéité des contraintes locales due à l'hétérogénéité des propriétés mécaniques locales [Guriev et al.,1984] [Barbe et al.,2001] [Pommier,2002]. Lorsque les défauts présents dans le matériau sont du même ordre de grandeur que la taille de grain, le comportement mécanique à l'échelle microscopique joue un rôle important dans l'amorçage d'une fissure de fatigue. En effet, même si la contrainte macroscopique est telle que l'on reste en-dessous du seuil de fatigue prévu par un critère, cela n'empêche pas certains grains bien orientés de subir une contrainte locale plus élevée et par conséquent de dépasser ce seuil. Il semble donc approprié de prendre en compte une échelle supplémentaire dans la modélisation de la rupture par fatigue.

Afin de tenir compte de la dispersion des contraintes locales dans le critère de non-propagation mis en œuvre, il nous faut dans un premier temps la caractériser. Pour ce faire, des calculs de microstructure par éléments finis ont été réalisés. Il s'agit de calculs élastiques, le but étant de mettre en évidence l'influence des grains voisins sur les contraintes et les déformations dans un grain d'orientation cristalline fixée. La dispersion d'origine microstructurale dans le domaine d'élasticité du matériau est ainsi caractérisée une fois pour toute pour le matériau étudié.

Un des objectifs principaux de cette étude est d'introduire une échelle spatiale dans le critère de fatigue. Dans la première partie de l'étude, la dimension des défauts a été introduite dans le critère. Dans cette seconde partie, on veillera donc à ce que la dispersion des contraintes à l'échelle microstructurale soit caractérisée **spatialement**. En effet, lorsque le défaut est suffisamment grand vis-à-vis de la fluctuation spatiale des contraintes d'origine microstructurale, cette fluctuation n'a plus d'importance. Tandis que des défauts plus petits, de dimension comparable à cette fluctuation, y seront beaucoup plus sensibles.

Par la suite, le critère ne sera utilisé qu'à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire avec une contrainte moyenne représentative d'un très grand nombre de grains. Seulement, lors de l'application du critère de non-propagation, au lieu de considérer la contrainte macroscopique seule, on utilisera la contrainte macroscopique agrémentée de la dispersion caractérisée à l'échelle microscopique (Figure 3-1), ce qui introduira un second caractère probabiliste au critère.

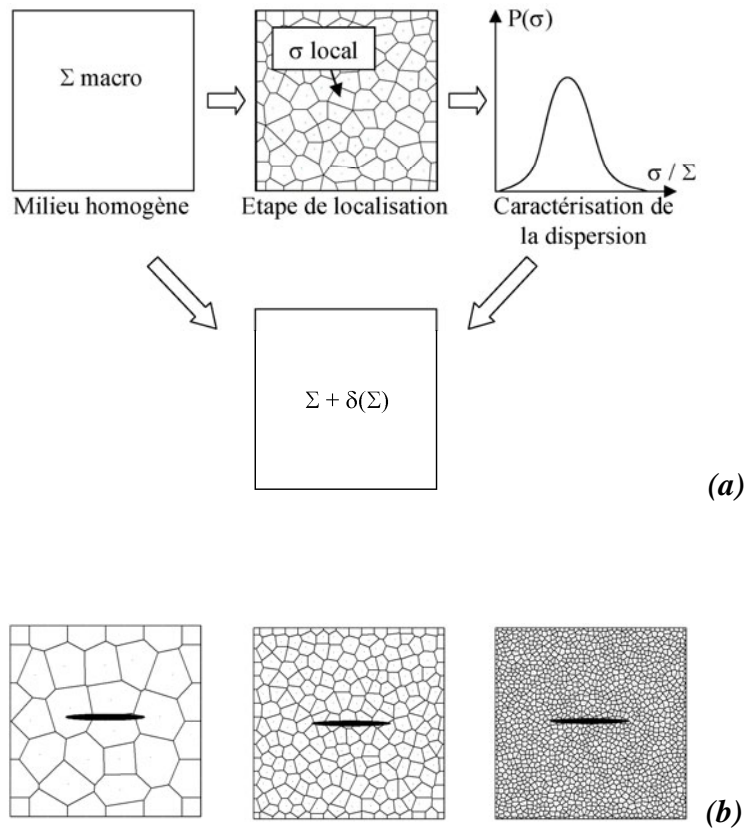


Figure 3-1 : Schéma de principe. Le calcul de structure ne donne accès qu'à l'estimation de la contrainte moyenne dans un élément de volume. Or à l'échelle locale, la microstructure induit des fluctuations de contraintes que l'on cherchera à caractériser en intensité et spatialement afin d'en tenir compte ensuite pour post-traiter des calculs de structure macroscopiques. (b) Selon la dimension relative du défaut et de la microstructure, cette fluctuation pourra induire ou non une fluctuation du seuil d'endommagement de fatigue.

### 3.1. Bibliographie

#### 3.1.1. Modèles polycristallins

Pour certains problèmes physiques fortement hétérogènes, une modélisation macroscopique n'est pas toujours suffisante. Il s'avère alors intéressant d'aller explorer ce qui se passe au niveau de la microstructure. L'essor de cette nouvelle branche du calcul de structure à laquelle on fait référence sous le terme de « **calcul de microstructure** » [Forest et al., 2002] a été rendu possible par le développement des moyens de calculs (augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs, calcul parallèle...).

En présence d'un matériau hétérogène, une approche plus classique consiste à considérer uniquement un Volume Élémentaire Représentatif (VER) de ce matériau. La théorie de l'homogénéisation permet alors de caractériser les propriétés effectives de ce VER en fonction des propriétés de chacune des phases représentées. Ce type d'approche a l'avantage de donner rapidement une bonne approximation du comportement moyen de la structure, mais ne permet pas de rendre compte des détails des hétérogénéités locales de contrainte et de déformation. L'endommagement de fatigue est un phénomène localisé. Il est donc raisonnable de le décrire par des valeurs locales du tenseur des contraintes. L'accès à ces valeurs n'est pas

possible avec la théorie classique de l'homogénéisation, il est alors nécessaire de mettre en place un modèle de microstructure.

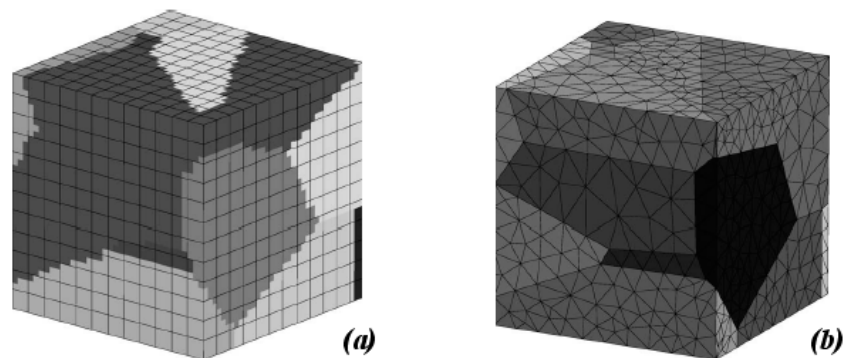
Les matériaux considérés dans cette étude sont des matériaux polycristallins. Ils sont constitués de grains ayant chacun une orientation cristalline distincte. Cette disparité d'orientation grain à grain engendre des réponses variées pour une sollicitation donnée. Des incompatibilités de déformation entre grains voisins peuvent aussi survenir, donnant lieu à des gradients de contraintes locaux élevés. Dans le cas des matériaux polycristallins, le calcul de microstructure permet donc de rendre compte de l'hétérogénéité aussi bien intragranulaire qu'intergranulaire.

On peut distinguer trois étapes principales dans le calcul de microstructure [Forest et al.,2002] :

- Représentation la plus réaliste possible de la microstructure étudiée.
- Choix des méthodes numériques pour réaliser le calcul.
- Identification des lois de comportement locales.

La représentation choisie pour la microstructure influe fortement sur le comportement mécanique global du matériau. Il est donc important qu'elle soit la plus représentative possible de la réalité. La **décomposition de Voronoï** est la représentation la mieux adaptée aux matériaux polycristallins. Les grains sont obtenus à partir de germes aléatoirement dispersés dans le volume de la structure et dont on considère qu'ils croissent de façon isotrope et à vitesse constante [Barbe et al.,2001].

Concernant la méthode numérique, la **méthode des éléments finis** est le choix le plus courant. On doit alors mailler la microstructure mise en place. Une première possibilité consiste à superposer à la microstructure un maillage régulier (Figure 3-2.a). C'est la solution retenue par l'équipe de recherche du Centre des Matériaux [Barbe et al., 2001] [Diard et al.,2005]. Les propriétés mécaniques des grains du polycristal sont affectées aux points d'intégration des éléments. On constate cependant que les interfaces sont assez mal représentées. Une deuxième solution consiste à mailler la microstructure en respectant la géométrie (Figure 3-2.b). Un grain du polycristal est constitué d'un ensemble d'éléments et les interfaces sont alors bien représentées. Quelle que soit la solution choisie, le maillage doit être suffisamment fin si l'on veut tenir compte du gradient de contrainte intragranulaire lié à l'incompatibilité de déformation entre certains grains voisins [Diard et al.,2005].



**Figure 3-2 : Maillage d'un agrégat polycristallin de 10 grains par affectation de d'orientations locales (a) aux points d'intégrations d'un modèles éléments fini régulier (b) à des domaines maillés de manière à représenter géométriquement la microstructure [Forest,2002]**

En dernier lieu, il revient d'affecter une **loi de comportement** aux éléments constitutifs de la microstructure. Cela s'avère être le point le plus délicat du calcul de microstructure. Il est effectivement difficile d'accéder au comportement local du matériau. Dans le cadre de cette étude, nous nous limitons au comportement élastique, ce qui simplifie déjà grandement la problématique étant donné que le comportement élastique du monocristal est bien connu pour la plupart des métaux. Une approche consiste à affecter aux grains du polycristal les valeurs des paramètres matériaux de la loi de comportement du monocristal correspondant, même si l'on sait que des différences significatives peuvent exister [Forest et al.,2002]. Ceci est en partie dû au fait que les paramètres des monocristaux sont généralement obtenus par identification inverse, à partir de la réponse macroscopique du polycristal et de la réponse d'un modèle homogénéisé. Le choix du modèle d'homogénéisation peut donc introduire un écart.

### 3.1.2. Fluctuation des champs mécaniques dans le polycristal

L'hétérogénéité des contraintes et des déformations locales dans un polycristal est un phénomène connu et largement étudié. Les grains d'un polycristal n'ayant pas tous la même orientation, leur réponse à un chargement diffère, même si l'on reste dans le domaine d'élasticité. Ceci est à l'origine d'une hétérogénéité des contraintes et des déformations locales à l'échelle des grains et de leur voisinage immédiat [Gurieiev et al.,1984] [Barbe et al.,2001] [Diard et al.,2005] [Sauzay,2006]. A plus grande échelle – comme dans les milieux granulaires [Radjai,1999] – on voit aussi se former des réseaux de percolation de la charge, c'est-à-dire que la distribution spatiale des contraintes est auto-organisée et possède une longueur interne [Pommier,2002].

#### 3.1.2.1. A l'échelle des grains et de leur voisinage immédiat

Gurieiev et Bogdanov [Gurieiev et al.,1984] ont cherché à mettre en évidence l'influence des distributions de contraintes microscopiques sur le phénomène de rupture fragile. Pour cela, ils ont mené une étude visant à caractériser les régularités statistiques des distributions des contraintes microscopiques.

Le modèle employé pour cette analyse est une plaque carrée, contenant 36 grains dont les orientations cristallines sont aléatoires. Le comportement du matériau, un fer- $\alpha$ , est introduit par les coefficients d'élasticités. Le type de chargement appliqué est caractérisé par le rapport  $n = \sigma_2 / \sigma_1$ . Un calcul par éléments finis permet de déterminer les contraintes locales dans les plans perpendiculaires aux directions de chargement, dans les plans tangentiels ainsi que dans certains plans cristallographiques, connus pour être des plans de glissement privilégiés pour ce type de structure cristalline.

Le rôle du type de chargement – caractérisé par  $n$  – sur la fluctuation sur les contraintes locales est mis en évidence. On observe une augmentation continue de la dispersion normalisée par la contrainte  $\sigma_1$ , depuis un chargement de traction équibiaxial où  $n = 1$  à un chargement où  $n = -1$ .

Afin de caractériser plus précisément les fluctuations des champs mécaniques dans le polycristal, une représentation plus réaliste de la microstructure est nécessaire. Des travaux sur les polycristaux cubiques centrés [Barbe et al.,2001] et hexagonaux compacts [Diard et al.,2005] ont été menés, selon la méthode exposée au paragraphe précédent (§ 3.1.1) : la microstructure est modélisée par des polygones de Voronoï et le comportement des grains est

élastoplastique. Il est observé que la dispersion du comportement d'un grain vis-à-vis du comportement macroscopique augmente lorsque la distance à la surface diminue d'une part, et lorsque la taille de grain diminue d'autre part. Une échelle spatiale interne semble se dégager : des structures de déformation plastique se développent à une échelle supérieure à la taille de grain.

Les travaux de Sauzay [Sauzay,2006] mettent eux aussi en évidence l'importance de l'anisotropie élastique, notamment l'influence des grains voisins. Pour cela un agrégat polycristallin de 14 grains est modélisé (Figure 3-3.a), et placé au centre d'une matrice dont le comportement macroscopique représente le polycristal (Figure 3-3.b). La dispersion des contraintes dans le grain central en surface de l'agrégat est étudiée par calculs éléments finis, pour deux configurations distinctes :

- Dispersion *inter-orientation* : le comportement des treize autres grains de l'agrégat est le même que celui de la matrice et seul le grain central a un comportement cristallin. 60 orientations aléatoires sont choisies pour le grain central.
- Dispersion *intra-orientation* : l'orientation du grain central en surface de l'agrégat est fixée parmi cinq orientations prédéfinies, et les orientations des treize autres grains sont aléatoires. 60 combinaisons aléatoires d'orientations des grains voisins sont définies.

La structure ainsi modélisée est sollicitée en traction uniaxiale. Les matériaux étudiés sont, par ordre croissant d'anisotropie élastique, l'aluminium, le nickel et le cuivre.

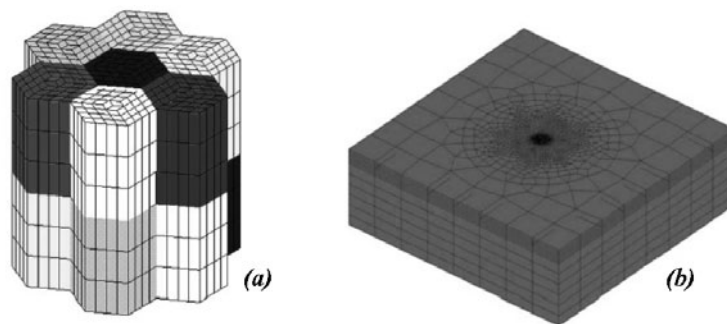
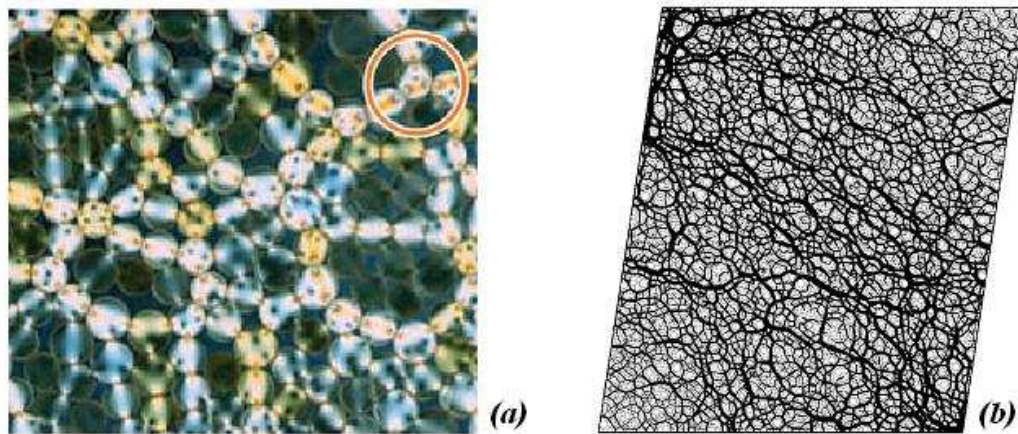


Figure 3-3 : (a) Agrégat polycristallin de 14 grains (b) Maillage global de la structure avec l'agrégat situé en son centre [Sauzay,2006].

Cette étude montre que la dispersion due aux grains voisins (dispersion intra-orientation) est supérieure à celle due à l'orientation du grain lui-même (dispersion inter-orientation). De plus, il apparaît que l'orientation choisie pour le grain central influe peu sur la dispersion calculée.

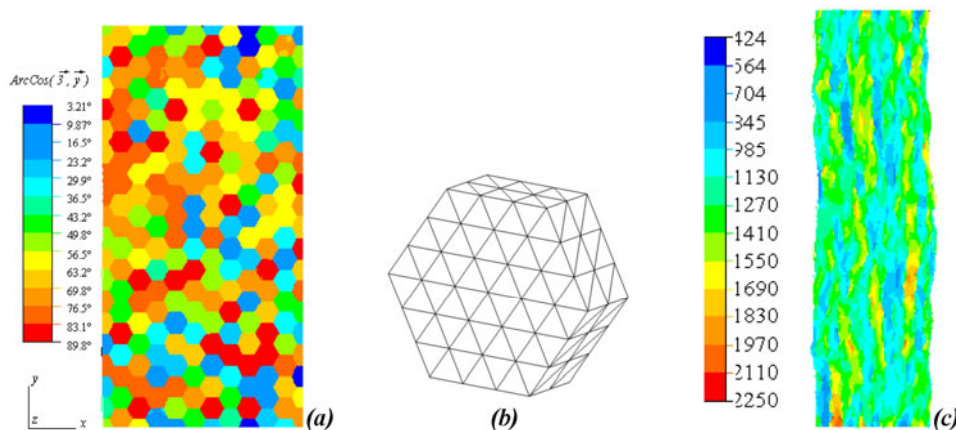
### 3.1.2.2. A plus grande échelle

Des essais réalisés, sur des milieux granulaires modèles, des rouleaux de PMMA biréfringents par exemple [Dantu,1957], ont permis de montrer une auto-organisation, à une échelle nettement plus grande que le « grain », de la distribution des efforts entre grains. Cette organisation, appelée **effet de voûte** ou **réseau de percolation de la charge**, se forme aussi en 3D, ce qui a été montré à l'aide de simulations numériques. Les « voûtes » se forment selon les directions principales des contraintes macroscopiques. On peut leur associer une échelle spatiale caractéristique de l'ordre de dix grains.



**Figure 3-4 : Représentation schématique du réseau de distribution des forces dans un milieu granulaire bidimensionnel. (a) expérience à l'aide de cylindres biréfringents [Van Hecke,2005], (b) simulation numérique d'un essai de cisaillement sur un milieu constitué de cylindres indéformables en contacts. [Radjai,1999]. Plus grande est l'intensité de la force plus épaisse est la ligne reliant deux centres de grains.**

Des effets similaires ont été mis en évidence dans les polycristaux métalliques. Lors d'essais de traction simple sur des éprouvettes planes d'alliage de titane (TA6V), la technique de la photoélasticité en réflexion a permis de mettre en évidence un réseau plus ou moins régulier de bandes dans lesquelles la déformation était plus intense. Après vérification, ces bandes ne sont pas liées à la plasticité. Afin d'expliquer la formation de ces bandes, des simulations numériques par éléments finis ont été effectuées [Pommier,2002]. Une plaque mince a été modélisée par des éléments tétraédriques linéaires, et les grains du polycristal – de base hexagonale – sont constitués d'éléments de même orientation cristalline (Figure 3-5). Les orientations des grains sont aléatoires, de façon à générer une texture isotrope.



**Figure 3-5 : (a) Microstructure constituée de grains hexagonaux d'orientations aléatoires (b) Maillage d'un grain de la structure (c) Intensité de la contrainte principale maximale pour un essai de traction pour un polycristal de cuivre [Pommier,2002]**

Le comportement des grains est modélisé par une élasticité linéaire anisotrope, et des simulations d'essais de traction et de cisaillement pour différentes réalisations sont effectuées. Lorsque l'on visualise l'intensité de la contrainte principale maximale dans le polycristal, on constate qu'elle est bien hétérogène, mais surtout qu'il existe – comme dans les milieux granulaires – une organisation spatiale de cette hétérogénéité à une échelle supérieure à celle du grain. Le réseau de percolation de la charge ainsi mis en évidence semble s'aligner avec les

directions principales de la structure. Par ailleurs la distribution statistique de la contrainte dans un grain en fonction de l'orientation cristalline de ses voisins a l'allure d'une gaussienne.

### 3.1.3. Synthèse sur les agrégats polycristallins, leurs modélisations et leurs propriétés

Le calcul de microstructure peut se décomposer selon les trois étapes suivantes :

- *Une représentation, la plus réaliste possible, de la microstructure.*  
La décomposition de Voronoï est la méthode la plus adaptée pour les polycristaux qui constituent les matériaux de notre étude.
- *Le choix de la méthode numérique.*  
La méthode des éléments finis est la plus courante.
- *Le choix de la loi de comportement locale.*  
C'est la partie délicate de la modélisation. Elle dépend de ce que l'on cherche à modéliser. Ici on se limitera au comportement élastique.

Ce type de calcul est devenu accessible grâce aux progrès significatifs des moyens de calcul ces dernières années. L'endommagement de fatigue des métaux étant un phénomène local, il est intéressant de pouvoir modéliser ce qui se passe de façon précise au niveau de la microstructure.

Des études numériques sur des modèles de microstructures ont permis de mettre en évidence certaines propriétés sur la fluctuation des propriétés mécaniques locales :

- Sensibilité au type de chargement.
- Sensibilité à la position dans la microstructure (surface ou volume).

Par ailleurs, tout comme dans les milieux granulaires, une échelle spatiale interne, supérieure à la taille de grain, semble être liée à cette fluctuation.

## 3.2. Mise en œuvre des calculs éléments finis d'agrégats polycristallins 2D et 3D

Dans l'intention de caractériser l'intensité et l'échelle spatiale de la fluctuation des contraintes dans le polycristal, des calculs par éléments finis d'**agrégats polycristallins 2D et 3D** sont effectués, pour les matériaux considérés dans cette étude (superalliages à base de nickel, alliages de titane, ainsi que le 30NCD16 pour lequel on a identifié le critère au chapitre précédent). Ces calculs seront conduits sur des microstructures les plus réalistes possibles, aussi bien pour des problèmes bidimensionnels que tridimensionnels.

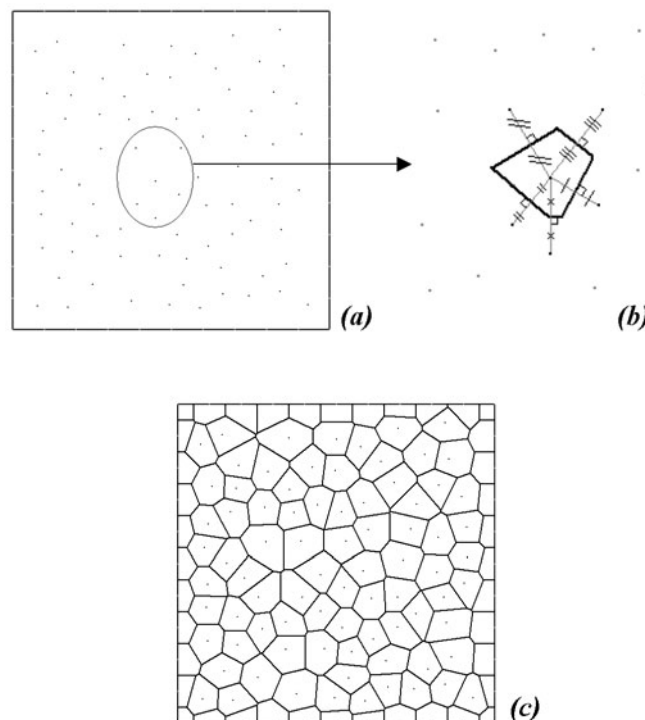
### 3.2.1. Représentation de la microstructure

La construction de la microstructure est réalisée à l'aide d'un logiciel développé par S.Pommier, et est basée sur la **décomposition de Voronoï**, qui s'adapte très bien aux polycristaux. Les étapes sont les suivantes :



- Un jeu de points initial est tiré aléatoirement, ces points constitueront les centres de grains (Figure 3-6.a).
- Pour chaque point, l'ensemble de ses plus proches voisins est calculé.
- Dans le cas d'une structure bidimensionnelle, on trace la médiatrice de chaque segment reliant un point central à ses voisins les plus proches (Figure 3-6.b). Dans le cas d'une structure tridimensionnelle, on définit le plan normal médian au segment reliant un point central à chacun de ses voisins.
- L'opération précédente est répétée pour tous les points contenus dans la structure. Les polygones (ou polyèdres) ainsi formés constituent les grains de la microstructure (Figure 3-6.c).
- Enfin, chaque grain est maillé afin de constituer un modèle élément finis de la microstructure.

Lorsque les points initiaux sont aléatoirement distribués, les polygones sont irréguliers. Dans le cas d'un modèle 3D, le maillage des faces est régulier tandis que les grains internes peuvent être irréguliers.



**Figure 3-6 : Schéma de construction d'une microstructure 2D suivant la décomposition de Voronoï**  
**(a) Jeu de points aléatoirement répartis dans la structure (b) Polygone de Voronoï créé à partir d'un point central et de ses voisins les plus proches (c) Microstructure 2D**

Le logiciel de décomposition de Voronoï nous permet de générer des microstructures bidimensionnelles – sur une plaque carrée de dimensions arbitraires  $1000 \times 1000$  – ainsi que des microstructures tridimensionnelles – sur un cube de dimensions arbitraires  $1632 \times 2000 \times 1732$ . On définit alors les cas tests suivants (Figure 3-7) :

- **Trois cas tests bidimensionnels :**

- **103 grains** : la taille de grain moyenne est de 100, et on a approximativement 10 grains dans la hauteur ainsi que dans la largeur de la plaque.
- **1179 grains** : la taille de grain moyenne est de 30, et on a approximativement 33 grains dans la hauteur ainsi que dans la largeur de la plaque.
- **4578 grains** : la taille de grain moyenne est de 15, et on a approximativement 67 grains dans la hauteur ainsi que dans la largeur de la plaque.

- **Deux cas tests tridimensionnels :**

- **1271 grains** : la taille de grain moyenne est de 200, et on a approximativement 8 grains dans la direction x, 9 dans la direction y et 10 dans la direction z.
- **14888 grains** : la taille de grain moyenne est de 90, et on a approximativement 18 grains dans la direction x, 19 dans la direction y et 22 dans la direction z.

Comme la loi de comportement (élasticité anisotrope) introduite dans chaque grain n'a pas d'effet d'échelle, le paramètre de taille de grain est arbitraire.

En revanche, plus le nombre de grains dans le volume simulé est élevé, plus on sera à même de représenter des « périodes » de la fluctuation du champ de contrainte. A l'inverse, pour étudier l'intensité de cette fluctuation, un petit modèle suffit, puisque l'effet des premiers voisins est dominant. C'est pourquoi des cas tests plus ou moins raffinés en terme de microstructure ont été construits.

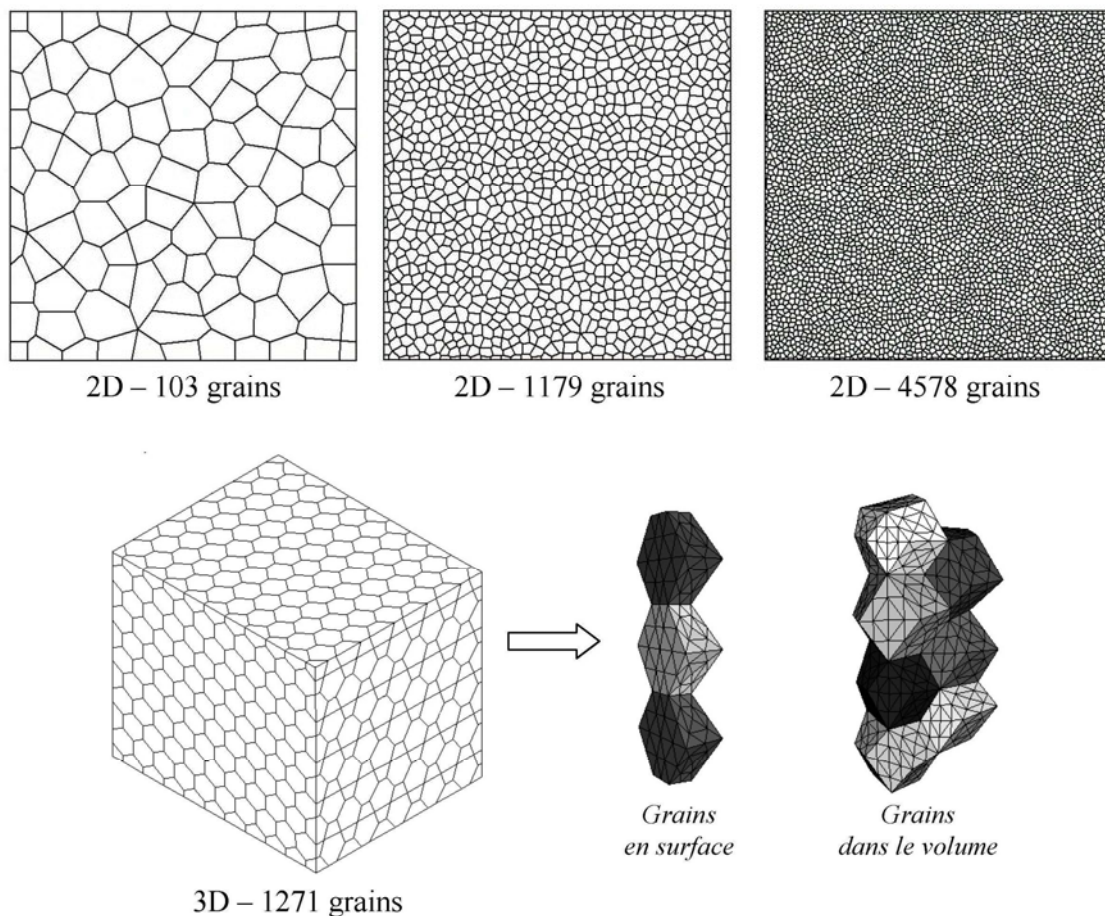


Figure 3-7 : Microstructures étudiées.

### 3.2.2. Loi de comportement locale

Le comportement de chaque grain est modélisé par une loi d'élasticité anisotrope linéaire et s'écrit de la façon suivante dans le repère local  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1113} & D_{1123} \\ & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2213} & D_{2223} \\ & & D_{3333} & D_{3312} & D_{3313} & D_{3323} \\ & & & D_{1212} & D_{1213} & D_{1223} \\ & sym. & & D_{1313} & D_{1323} & \\ & & & & D_{2323} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3-1)$$

Dans le cas général, on dénombre ainsi vingt-et-une constantes d'élasticité indépendantes. Les matériaux étudiés sont des polycristaux, et présentent de ce fait certaines symétries conduisant à réduire considérablement le nombre de constantes à prendre en compte, et que l'on modélisera de la façon suivante :

- **Polycristaux à symétrie cubique** (Nickel, Fer- $\alpha$ )

On affecte aux grains un comportement élastique cubique (équation (3-2)), caractérisé par trois constantes indépendantes :  $D_{1111}$ ,  $D_{1122}$  et  $D_{1313}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{1111} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{1313} & 0 & 0 \\ & sym. & & D_{1313} & 0 & \\ & & & & D_{1313} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

- **Polycristaux à symétrie hexagonale** (Titane)

On affecte aux grains un comportement isotrope transverse par rapport au troisième axe (le matériau est isotrope dans tous les plans normaux à  $\vec{x}_3$ ) (équation (3-3)), caractérisé par cinq constantes indépendantes :  $D_{1111}$ ,  $D_{1122}$ ,  $D_{1133}$ ,  $D_{3333}$  et  $D_{1313}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{1111} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{D_{1111} - D_{1122}}{2} & 0 & 0 \\ & sym. & & D_{1313} & 0 & \\ & & & & D_{1313} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

Les constantes élastiques des matériaux étudiés sont référencées dans le Tableau 3-1 [Huntington,1958], [Kim et al.,2006].

Cristal	Symétrie cristalline	Comportement élastique	$D_{1111}$ [MPa]	$D_{1122}$ [MPa]	$D_{1133}$ [MPa]	$D_{3333}$ [MPa]	$D_{1313}$ [MPa]
Fer- $\alpha$	Cubique	Cubique $/(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$	231.5	135	$= D_{1122}$	$= D_{1111}$	116
Nickel	Cubique	Cubique $/(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$	246.5	147.3	$= D_{1122}$	$= D_{1111}$	124.7
Titane	Hexagonale	Isotrope transverse $/\vec{x}_3$	162	92	69	180.7	46.7

Tableau 3-1 : Constantes d'élasticité des matériaux étudiés (Fer- $\alpha$ , Nickel, Titane)

Le degré d'anisotropie élastique de chaque matériau peut être estimé par un coefficient adimensionnel  $a = 2D_{1313}/(D_{1111} - D_{1122})$ . Le Titane est très faiblement anisotrope ( $a=1,3$ ), tandis que le Nickel et le Fer- $\alpha$  présentent une anisotropie beaucoup plus marquée ( $a=2,5$ ).

### 3.2.3. Calculs par éléments finis

Les **grains** sont maillés par des **éléments linéaires** : des éléments triangulaires en 2D et des éléments tétraédriques en 3D. Le maillage réalisé s'adapte à la microstructure de façon à modéliser correctement les interfaces entre les grains.

Un grain est défini par un groupe d'éléments auxquels on assigne la même orientation cristalline : les propriétés mécaniques sont alors les mêmes en tout point du grain. On suppose la **texture isotrope** : la distribution des orientations cristallines est totalement aléatoire. Les angles d'Euler ( $\varphi_1, \Phi, \varphi_2$ ) sont utilisés pour décrire l'orientation cristalline. On rappelle sur la Figure 3-8 leur définition permettant le passage du repère de la structure ( $x, y, z$ ) au repère local associé au grain ( $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ).

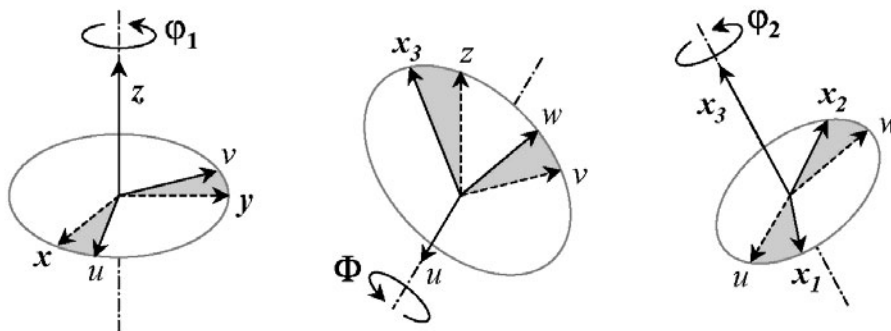
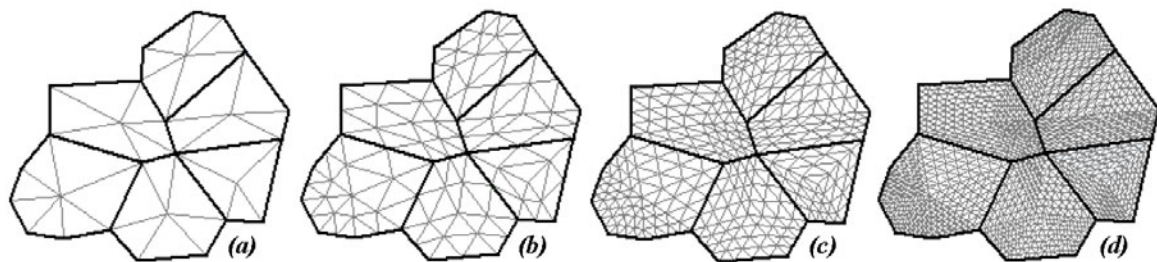


Figure 3-8 : Angles d'Euler ( $\varphi_1, \Phi, \varphi_2$ ) définissant l'orientation cristalline

Pour obtenir une texture isotrope, les angles  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont sélectionnés de façon aléatoire dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  tandis que le cosinus de l'angle  $\Phi$  prend une valeur aléatoire dans

l'intervalle  $[-1,1]$ . Dans le cas d'une microstructure bidimensionnelle, seul l'angle  $\varphi_1$  est varié (les angles  $\Phi$  et  $\varphi_2$  sont nuls).

Dans la suite de l'étude, on détermine la fluctuation des contraintes à l'intérieur d'un grain en fonction de ses voisins, puis sa fluctuation spatiale. La contrainte dans un grain est définie comme la moyenne des contraintes de chaque élément du grain. Le maillage est donc susceptible d'influencer la dispersion de contraintes locales obtenue. En conséquence, il apparaît comme nécessaire d'étudier au préalable la **sensibilité du calcul de la contrainte moyenne au maillage de la microstructure**. Lors de l'étape de maillage de la microstructure, un paramètre permet de préciser le nombre de subdivisions utilisées pour mailler un grain. On compare les résultats du calcul par éléments finis lorsque les grains sont maillés respectivement par une, deux, trois et quatre subdivisions successives des éléments (Figure 3-9). Cette étude est menée sur une microstructure bidimensionnelle, comprenant 103 grains, avec les constantes d'élasticité du nickel (Tableau 3-1).



**Figure 3-9 : Zoom de quatre maillages différents d'une même microstructure bidimensionnelle**  
(a) 1 subdivision des éléments du grain (b) 2 subdivisions de ces éléments (c) 3 subdivisions (d) 4 subdivisions.

On utilise pour les quatre maillages considérés le même jeu d'orientations cristallines pour les grains. On compare la composante maximale des contraintes principales dans le grain central pour ces quatre cas tests (la composante maximale des contraintes principales du grain étant la moyenne des contraintes principales maximales des éléments de ce grain) soumis à une sollicitation de traction suivant l'axe  $y$ .

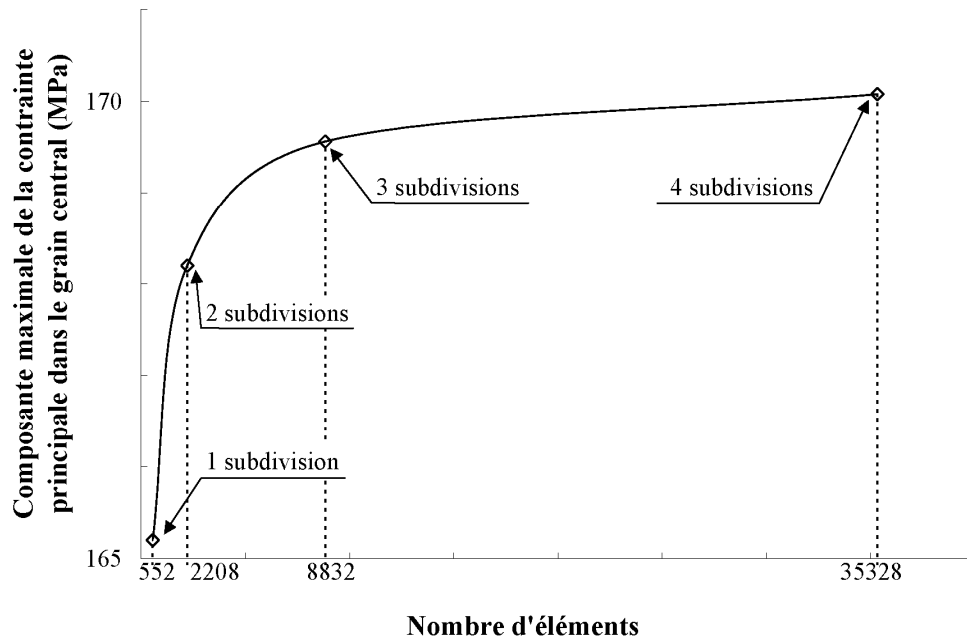


Figure 3-10 : Etude de sensibilité de la contrainte principale maximale moyenne par grain au nombre de subdivisions utilisées pour mailler ces grains. Cas test 2D / 103 grains.

On constate sur la Figure 3-10 que la moyenne de la contrainte principale maximale converge assez rapidement avec le nombre de subdivisions successives des éléments du grain. Pour **deux subdivisions d'éléments par grain**, le résultat du calcul par éléments finis peut être considéré comme acceptable (écart de 1% par rapport à la valeur obtenue pour quatre subdivisions d'éléments par grain). C'est le nombre de subdivisions que l'on prendra par la suite car il donne le meilleur compromis entre le nombre d'éléments (et donc le temps de calcul) et la convergence du calcul éléments finis.

### 3.2.4. Synthèse sur les différents modèles éléments finis utilisés pour les cas tests

Deux types de cas tests sont considérés dans cette étude : bidimensionnels et tridimensionnels. Dans chaque cas, la microstructure est représentée par des polygones de Voronoï. Le comportement est élastique, et les constantes d'élasticité choisies sont celles des monocristaux associés aux polycristaux étudiés. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes dépend des symétries du polycristal (3 dans le cas d'une symétrie cubique, 5 dans le cas d'une symétrie hexagonale). Les orientations des grains sont aléatoires, de façon à générer une texture isotrope. Les contraintes locales sont obtenues par calcul par éléments finis. Une étude de convergence a montré que deux subdivisions successives des éléments par grain conduisaient à une erreur de l'ordre de 1%.

### ***3.3.Résultats : Caractérisation de la fluctuation des contraintes locales d'origine microstructurale***

Les objectifs de ces calculs sont les suivants : on cherche à caractériser la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale dans le domaine d'élasticité, tant au niveau de son intensité qu'au niveau spatial. En effet, il est hors de question de calculer des structures maillées à l'échelle du grain : le temps de calcul serait prohibitif ! On souhaite donc établir des règles simples quant à la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale applicables aux contraintes moyennes issues d'un calcul élastique macroscopique. Ces règles simples permettront de tenir compte de cette fluctuation dans le calcul du risque de rupture dans le cadre d'un post-traitement.

#### **3.3.1. Mise en évidence de l'organisation spatiale de la fluctuation**

A titre d'illustration, les champs de contraintes calculés pour les cas tests décrits au paragraphe 3.2.1 sont tracés ci-dessous. Le modèle éléments finis est soumis à une **sollicitation de traction**, suivant l'axe  $y$  pour les cas tests bidimensionnels et suivant l'axe  $z$  pour les cas tests tridimensionnels. On applique un déplacement sur les faces inférieure et supérieure de façon à avoir une déformation moyenne de 1%. La valeur de la déformation est arbitraire étant donné que le comportement est linéaire élastique. Les faces latérales sont laissées libres. Pour les microstructures bidimensionnelles, on se place dans le cadre de l'hypothèse des contraintes planes. Les calculs sont réalisés avec les constantes d'élasticité du nickel (Tableau 3-1).

On visualise les cartes d'intensité de la composante maximale des contraintes principales (Figure 3-11). Pour les microstructures tridimensionnelles, on présente des plans de coupe de normales  $x$ ,  $y$  et  $z$ , au centre du cube.

La contrainte principale maximale fluctue dans la microstructure simulée. On remarque qu'il se forme des zones surcontraintes, dont la largeur est à peu près celle d'un grain et dont la longueur varie selon le cas test considéré. Dans le cas des microstructures 2D, on n'observe que des « bandes » surcontraintes. Dans le cas des microstructures 3D, des « bandes » orientées selon la direction  $z$  apparaissent sur les plans de coupe de normale  $x$  ou  $y$ , tandis que dans un plan de coupe de normale  $z$ , c'est-à-dire normal à la direction principale du chargement, les zones surcontraintes ont la forme de « points ». Les grains surcontraints forment donc des colonnes selon la direction principale du chargement.

Enfin, lorsque le nombre de grains dans la microstructure calculée est assez grand (ex. cas tests 2D avec 1179 ou 4578 grains) on peut visualiser l'auto-organisation de la fluctuation de la contrainte, en colonnes distantes d'un nombre de grains plus ou moins constant. Il est à noter que l'allure de la fluctuation calculée est vraiment très similaire à ce que l'on observe dans les milieux granulaires (Figure 3-4). Ce qui n'est pas très surprenant, après tout, un polycristal est bien constitué de grains.



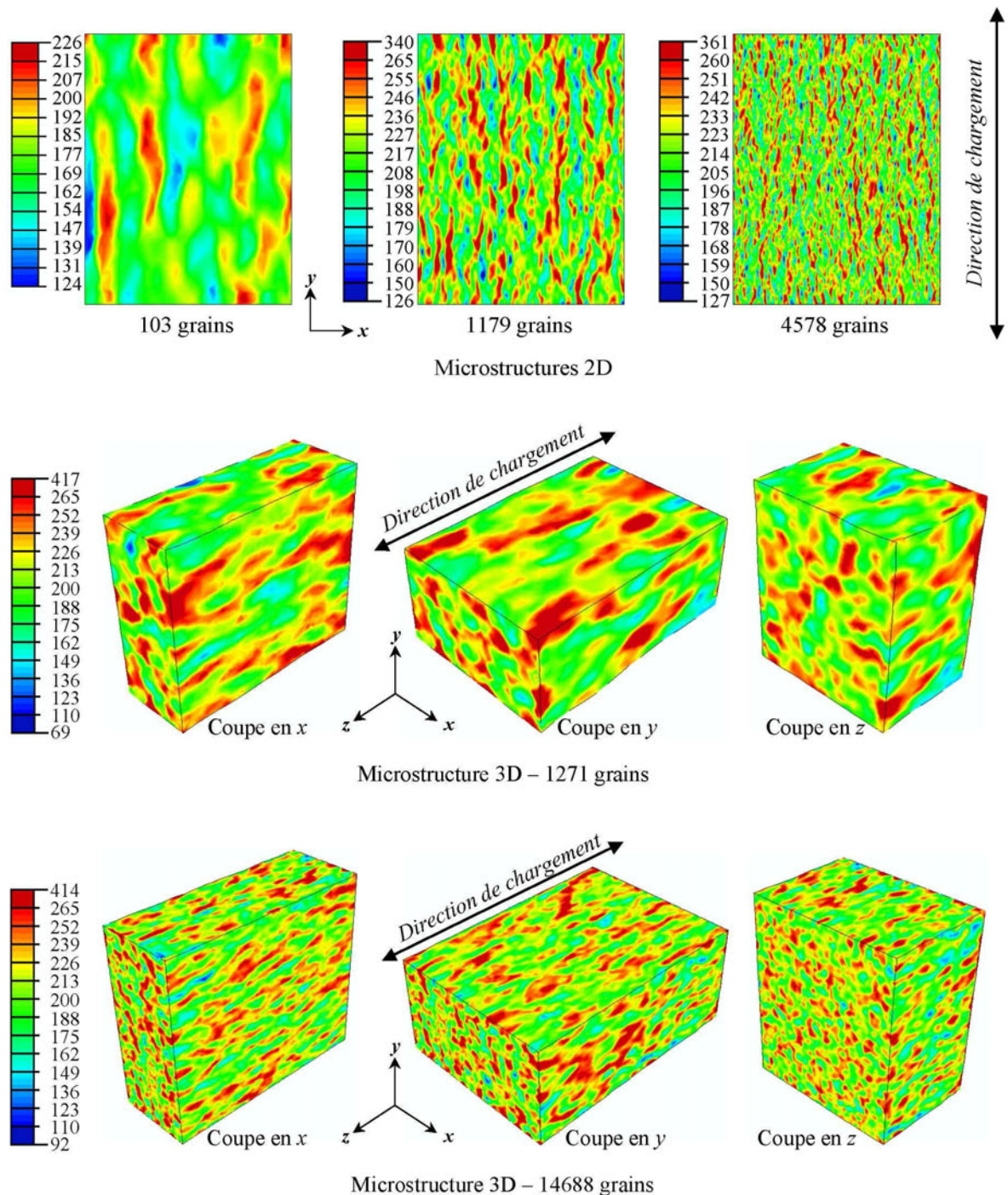


Figure 3-11 : Intensité de la composante maximale des contraintes principales pour les différentes microstructures étudiées, dans le cas d'un chargement de traction

On vérifie que les grains surcontraints s'alignent en colonnes selon les directions principales du chargement en modifiant ces directions principales. On simule ainsi, pour les mêmes cas tests, un chargement de **cisaillement pur**, dans le plan  $(x,y)$  pour les microstructures bidimensionnelles et dans le plan  $(x,z)$  pour les microstructures tridimensionnelles. Le coin inférieur gauche est fixé tandis que l'on tire sur le coin supérieur droit, en imposant aux faces opposées de rester parallèles.



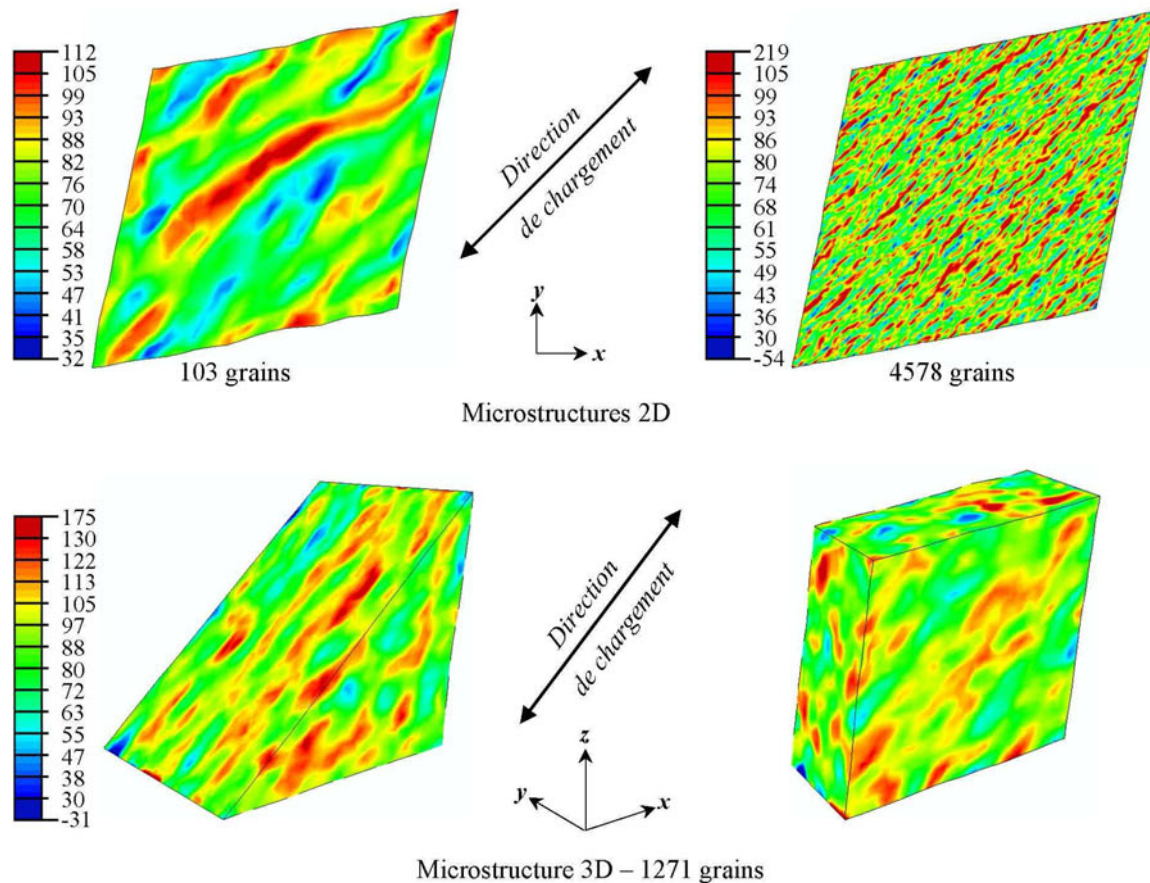


Figure 3-12 : Intensité de la composante maximale des contraintes principales pour les différentes microstructures étudiées, dans le cas d'un chargement de cisaillement

De la même façon que pour le chargement de traction, on observe la formation d'un réseau de grains surcontraints dont les arcs s'alignent selon les directions principales du chargement. Cet alignement est particulièrement visible pour la microstructure bidimensionnelle à 4578 grains.

Au vu des deux chargements étudiés, il apparaît clairement que, si la distribution des propriétés mécaniques des grains est aléatoire, en revanche la fluctuation des contraintes dans les grains qui en résulte est auto-organisée. Il reste maintenant à **déterminer l'échelle spatiale interne de la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale**.

Dans un premier temps, on évalue de façon grossière la distance qui sépare les bandes les unes des autres. A cette fin, on superpose une image de la microstructure sur les cartes d'intensité des contraintes principales maximales obtenues pour la sollicitation de traction simple (Figure 3-13). Les bandes que l'on voit apparaître sont parallèles à l'axe  $y$  et se répètent suivant l'axe  $x$ . On définira alors la période de l'hétérogénéité des contraintes locales comme le nombre moyen de grains qui séparent deux bandes. L'observation de la Figure 3-13 montre qu'il est difficile d'établir de manière précise une échelle spatiale à partir d'une estimation visuelle. En effet, certaines bandes sont espacées d'un grain seulement, tandis que d'autres sont espacées de quatre à cinq grains voire davantage. Cette étude préliminaire confirme néanmoins l'existence d'une **échelle microstructurale supplémentaire associée à la fluctuation**, supérieure à la taille des grains.

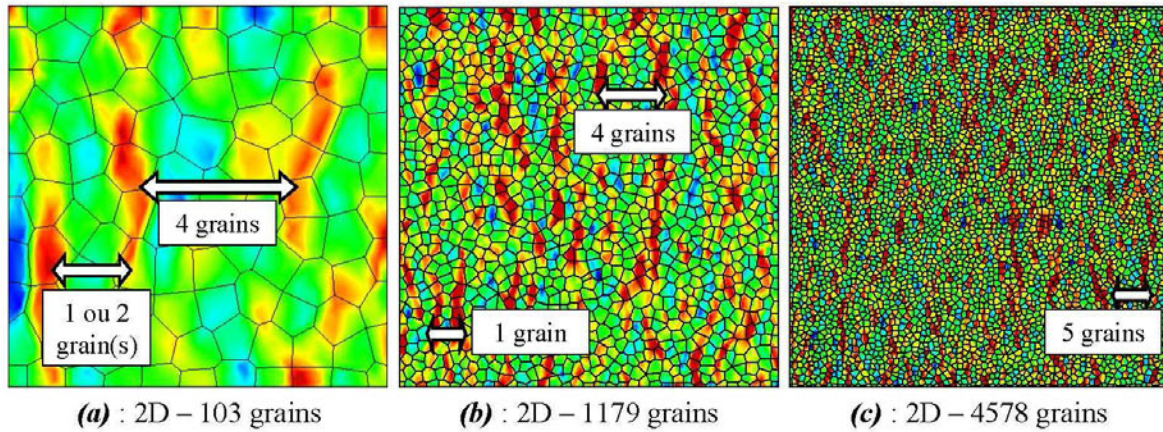


Figure 3-13 : Caractérisation « visuelle » de la périodicité des bandes dans lesquelles l'intensité de la contrainte principale maximale est plus grande que la moyenne dans la microstructure

### 3.3.2. Caractérisation de l'échelle spatiale de la fluctuation

Les caractéristiques principales que l'on peut dégager des cartes d'intensité de la contrainte principale maximale pour les microstructures bidimensionnelles sollicitées en traction simple sont les suivantes :

- Apparition de bandes surcontraintes s'alignant suivant la direction de traction  $y$ .
- Périodicité de la répartition de ces bandes dans la direction transverse  $x$ .
- Discontinuité de ces bandes dans la direction  $y$ .

Pour caractériser l'échelle spatiale de la fluctuation de la contrainte principale maximale, on procède à une **autocorrélation numérique de la carte d'intensité de la contrainte principale maximale** selon la direction  $x$ .

La **corrélation de deux signaux** mesure leur dépendance réciproque. Si l'on se place dans le cas de signaux réels et continus  $f(x)$  et  $g(x)$ , la fonction de corrélation, notée  $(g*f)$ , s'exprime comme suit :

$$(g * f)(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x-d) dx \quad (3-4)$$

De façon schématique, le degré de corrélation entre  $f$  et  $g$  est proportionnel à l'aire commune à ces deux signaux lorsque  $g$  est fixe et que l'on translate  $f$  d'une distance  $d$  dans la direction  $x$  (Figure 3-14). Un pic de la fonction de corrélation correspond à une distance  $d$  pour laquelle on a un maximum de recouvrement entre les fonctions  $f$  et  $g$ .

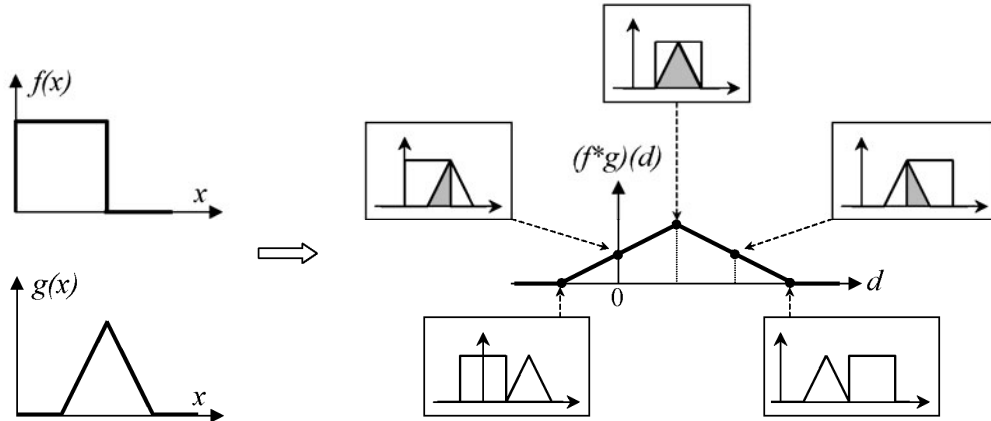


Figure 3-14 : Corrélation spatiale de deux signaux réels et continus

La **fonction d'autocorrélation**  $(f*f)(d)$  d'un signal  $f(x)$  mesure donc les dépendances internes de ce signal et est maximale en  $(d=0)$  (le signal se superpose parfaitement à lui-même). Par la suite, on travaillera avec la fonction d'autocorrélation normée par sa valeur en zéro.

Si l'on considère un signal périodique, une estimation de sa période est donnée par la distance entre deux pics de la fonction d'autocorrélation du signal.

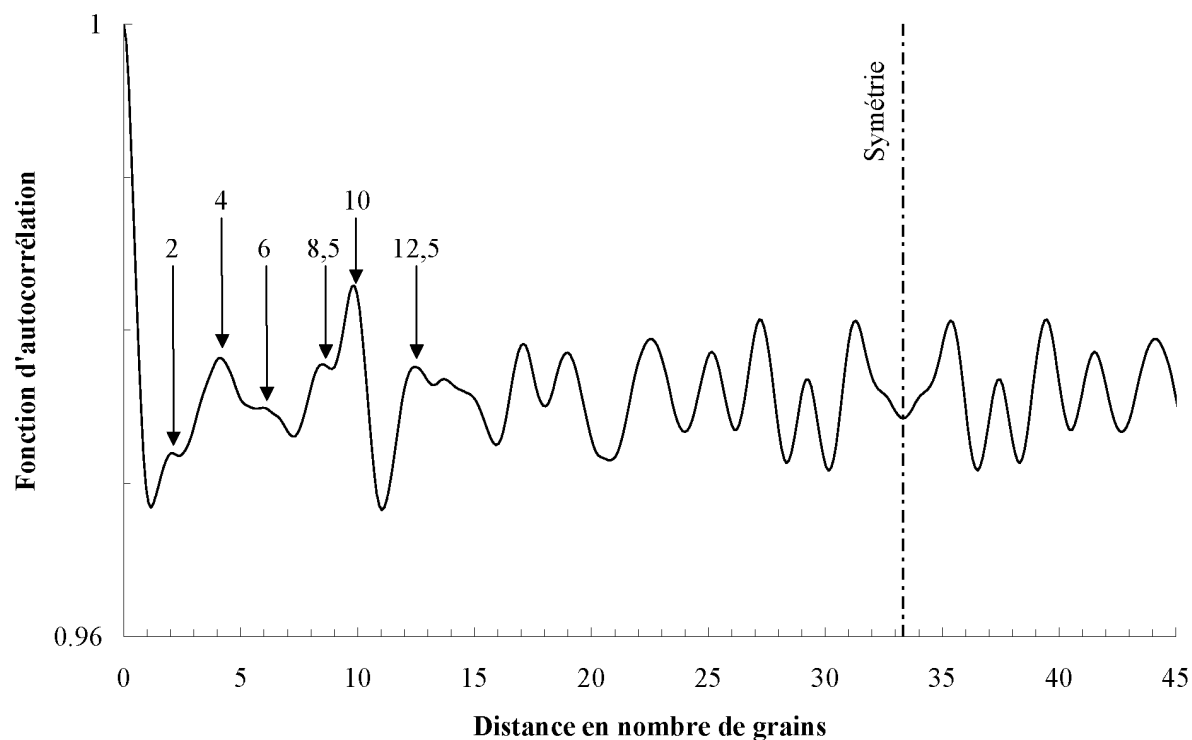
Considérons un signal discret  $s[k]$ ,  $k$  variant de 0 à  $N-1$ . La fonction d'autocorrélation, normée par sa valeur en zéro, est définie par :

$$(s * s)_{normée}[d] = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} s[k]^2} \sum_{k=0}^{N-1} s[k] \cdot s[k-d] \quad \text{avec} \quad s[k] = s[N+k] \quad \text{si} \quad k < 0 \quad (3-5)$$

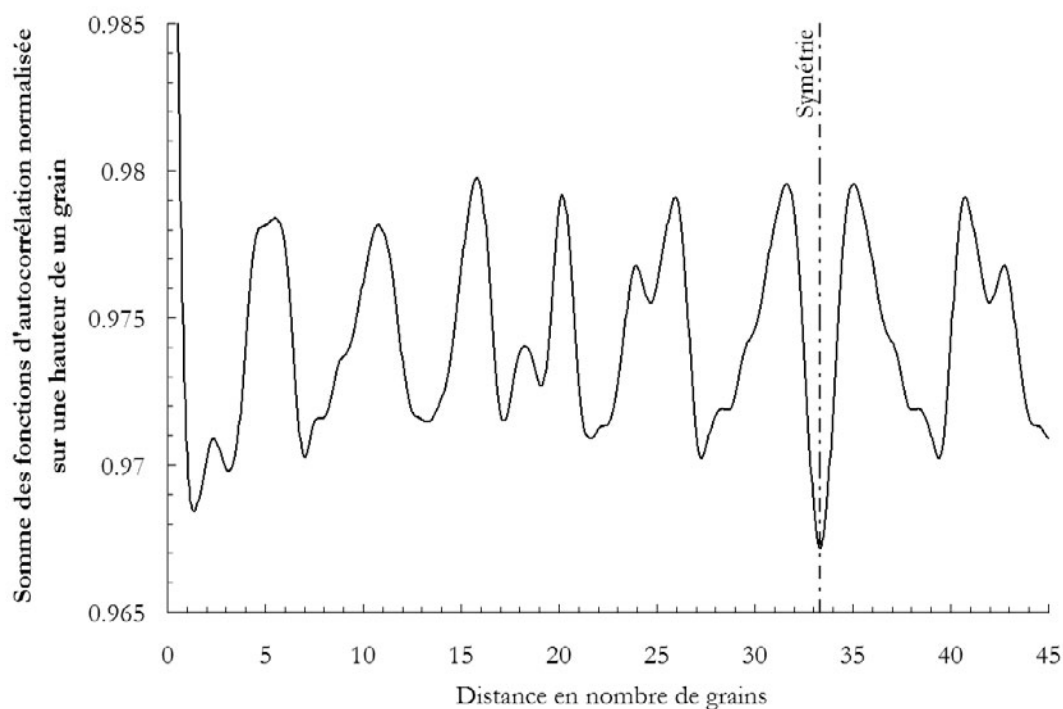
La fonction d'autocorrélation discrète, de même dimension que le signal d'entrée, prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0, N-1]$  et est symétrique par rapport à  $\frac{N-1}{2}$ .

En vue de caractériser la périodicité du réseau de grains surcontraints, on procède à l'autocorrélation de la carte d'intensité des contraintes principales maximales en **niveaux de gris** de la microstructure 2D de 4578 grains, sollicitée en traction. Considérons notre image comme une succession de  $N$  lignes d'un pixel de hauteur, on peut alors la décomposer en  $N$  signaux réels, notés  $s_i(x)$ , où  $x$  est la position du pixel dans la ligne, l'indice  $i$  désigne la position verticale de la ligne dans l'image et  $s_i(x)$  est un entier compris entre 0 et 255 correspondant à un niveau de gris et donc à une intensité de contrainte.

Dans un premier temps, on calcule la fonction d'autocorrélation pour chaque ligne  $i$  de l'image. On identifie ainsi une première période, de l'ordre de  $30\mu\text{m}$ , qui correspond, pour ce modèle de microstructure, à deux tailles de grains environ. Ceci correspond à l'alternance de grains sur et sous contraintes par rapport à la moyenne. Cette première échelle est l'échelle de la microstructure, que l'on connaît déjà.



**Figure 3-15 : Fonction d'autocorrélation de la ligne de pixels médiane de la carte d'intensité des contraintes principales maximales calculée en traction simple uniaxiale. Noter une première période de l'ordre de 2 grains**



**Figure 3-16 : Moyenne des fonctions d'autocorrélation des lignes de pixels de la carte d'intensité des contraintes principales maximales calculée en traction simple uniaxiale, sur une hauteur de un grain . Noter la période de l'ordre de 5 grains**

On note cependant, que les fonctions d'autocorrélation calculées pour chaque ligne de l'image présentent des pics de plus forte intensité que d'autres qui correspondent probablement à ce que l'on cherche, à savoir une seconde période, d'échelle supérieure à la taille des grains (Figure 3-13).

Plutôt que d'étudier l'image ligne par ligne, il apparaît plus pertinent de la découper en différentes tranches de hauteur au moins égale à la taille de grain (Figure 3-16). L'observation des figures d'intensité des contraintes principales maximales révèle que les alignements de grains surcontraints ont une longueur de quatre grains à la dizaine de grains. On choisit donc de découper l'image en tranches de 50 pixels de hauteur, ce qui représente approximativement cinq grains.

Pour chaque tranche, on calcule la fonction d'autocorrélation de toutes les lignes qui la composent et on moyenne les résultats obtenus. De cette façon, certaines composantes plus prononcées sont renforcées, et la période apparaît bien plus clairement (Figure 3-17). La période observée est d'environ  $80\mu\text{m}$ , ce qui est de l'ordre de **5 tailles de grain**. Cette période est déjà nettement visible pour des tranches dont la hauteur est de l'ordre de un grain (Figure 3-16) et ne dépend pas significativement de la dimension de la « tranche ».

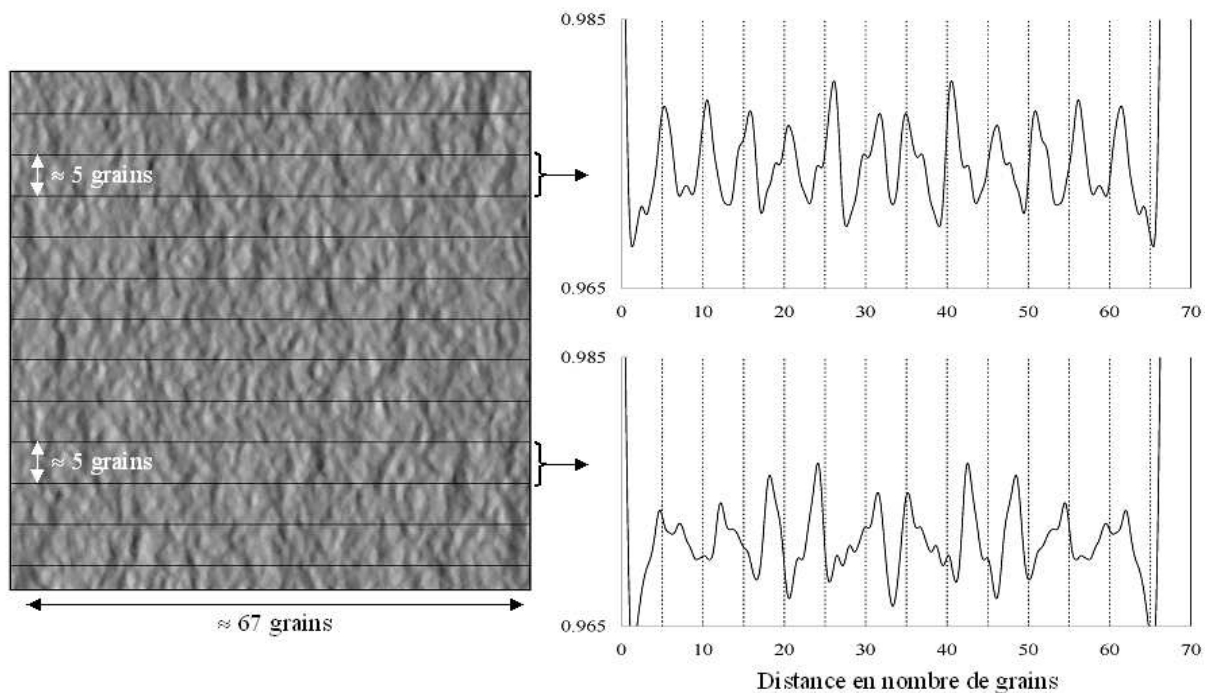


Figure 3-17 : Somme des fonctions d'autocorrélation de 50 lignes de pixels de l'image, soit 5 grains

Le phénomène de fluctuation des contraintes locales est donc périodique. On distingue au moins deux échelles pour cette fluctuation :

- **La première échelle est la taille des grains** : une alternance de grains fortement et faiblement chargés est mise en évidence.
- **La seconde échelle est de cinq fois la taille des grains** : des alignements de grains surcontraints apparaissent en élasticité dans le modèle de microstructure. Leur longueur est généralement supérieure à cinq grains et ils sont distants de 5 grains en moyenne.

### 3.3.3. Synthèse sur l'organisation spatiale de la fluctuation des contraintes locales

Des calculs numériques par éléments finis sur des agrégats polycristallins élastiques 2D et 3D ont permis de mettre en évidence une organisation périodique de la fluctuation des contraintes locales, et ceci alors que les propriétés mécaniques des grains ont été distribuées aléatoirement. Sur les cartes d'intensité de la contrainte principale maximale, les grains surcontraints s'alignent selon la direction principale maximale. Pour les constantes d'élasticité du nickel, la largeur de ces alignements est de 1 grain, leur longueur est supérieure à 5 grains et la distance entre deux alignements est régulière et de l'ordre de 5 grains. Les grains surcontraints forment ainsi un motif périodique dans le polycristal, dont la période a été estimée par autocorrélation spatiale des cartes d'intensité de la contrainte principale maximale. Cette échelle spatiale associée à la fluctuation des contraintes principales maximales est d'origine microstructurale et complètera les sources d'aléa du critère de fatigue proposé au chapitre précédent.

### 3.4. Caractérisation de l'intensité de la fluctuation

Deux sources d'aléa au moins peuvent être à l'origine de la dispersion des durées de vie en fatigue. Le matériau contient des défauts dont la taille est aléatoire. Ainsi, la première source d'aléa peut s'exprimer comme la probabilité qu'il existe dans chaque zone de la structure un défaut de dimension critique, c'est-à-dire conduisant à la rupture compte tenu du chargement subi par cette zone. La seconde source d'aléa se situe au niveau du chargement local. En effet, la contrainte locale fluctue dans la microstructure autour de la contrainte moyenne. Cette fluctuation a été clairement mise en évidence au paragraphe précédent. Il a été démontré qu'elle avait une échelle spatiale supérieure à la taille de grain. Par conséquent, lorsque la taille des défauts est du même ordre de grandeur que la taille des grains, cette fluctuation pourra perturber les conditions de propagation du défaut. Selon que le défaut se trouve dans une zone sur- ou sous-contrainte de la microstructure, il pourra ou non se propager. En revanche, si la dimension du défaut est très grande devant l'échelle spatiale de la fluctuation, elle n'aura que très peu d'importance. L'échelle spatiale caractéristique de la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale ayant été déterminée, il reste maintenant à quantifier son intensité.

#### 3.4.1. Procédure de caractérisation

L'orientation d'un grain situé au centre de la microstructure est fixée arbitrairement ( $\phi_1=0$ ,  $\Phi=0$ ,  $\phi_2=0$ ) tandis que les orientations des autres grains du modèle sont déterminées aléatoirement pour chaque calcul.

Avec l'hypothèse d'ergodicité et de stationnarité, pour une orientation cristalline donnée, la moyenne des contraintes calculées pour un seul grain et pour un grand nombre de tirages des orientations de ses voisins immédiats est égale à la moyenne spatiale des contraintes calculées

pour un seul tirage mais pour un très grand nombre de grains de même orientation. Ceci permet de limiter la dimension du modèle éléments finis pour les calculs de l'intensité de la fluctuation des contraintes. Cependant comme l'échelle spatiale de la fluctuation des contraintes est de 5 grains, le plus petit modèle de microstructure 2D à utiliser doit tout de même contenir une centaine de grains.

On effectue  $N$  calculs pour lesquels on relève à chaque fois la composante maximale des contraintes principales pour le grain central d'orientation fixée. On est alors en mesure de caractériser la dispersion de la contrainte principale maximale pour chaque orientation cristalline du grain central pour les  $N$  configurations aléatoires de ses grains voisins.

Les travaux de Pommier [Pommier, 2002] ont mis en évidence **l'allure gaussienne de la distribution** ainsi obtenue. Cette allure gaussienne se justifie par le très grand nombre de variables aléatoires indépendantes (les orientations cristallines des voisins) qui sont à l'origine de la distribution statistique de la contrainte dans le grain central. La procédure de caractérisation de cette distribution est résumée en Figure 3-18. Les calculs seront effectués avec les constantes d'élasticité du Nickel (Tableau 3-1).

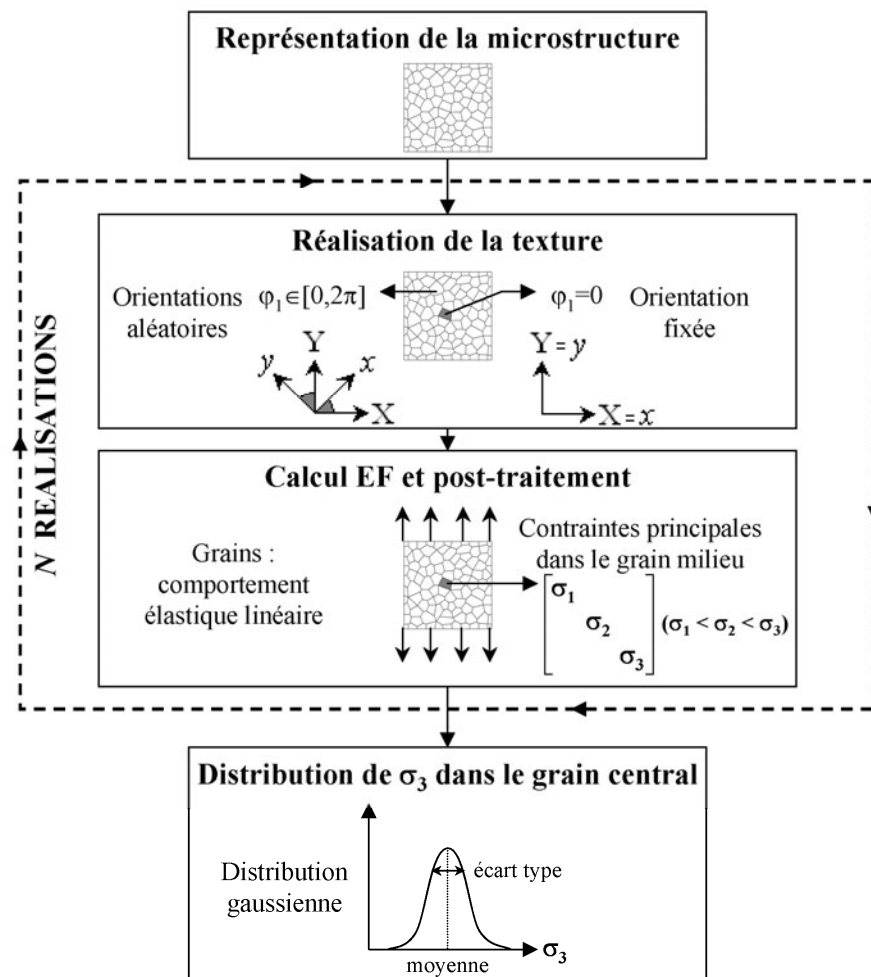


Figure 3-18 : Procédure de caractérisation de la dispersion des contraintes principales dans le grain central du modèle de microstructure, d'orientation fixée, pour une texture isotrope.

Etant donné que la distribution obtenue doit être gaussienne, l'écart de la distribution calculée numériquement à la fonction de répartition de la **loi normale centrée réduite** permet de



déterminer le nombre  $N$  de réalisations à effectuer. Pour cela, on calcule la moyenne  $E(x)$  ainsi que l'écart type  $\sigma(x)$  de la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central notée  $x$ , de façon à déterminer la variable centrée réduite  $X$  correspondante.

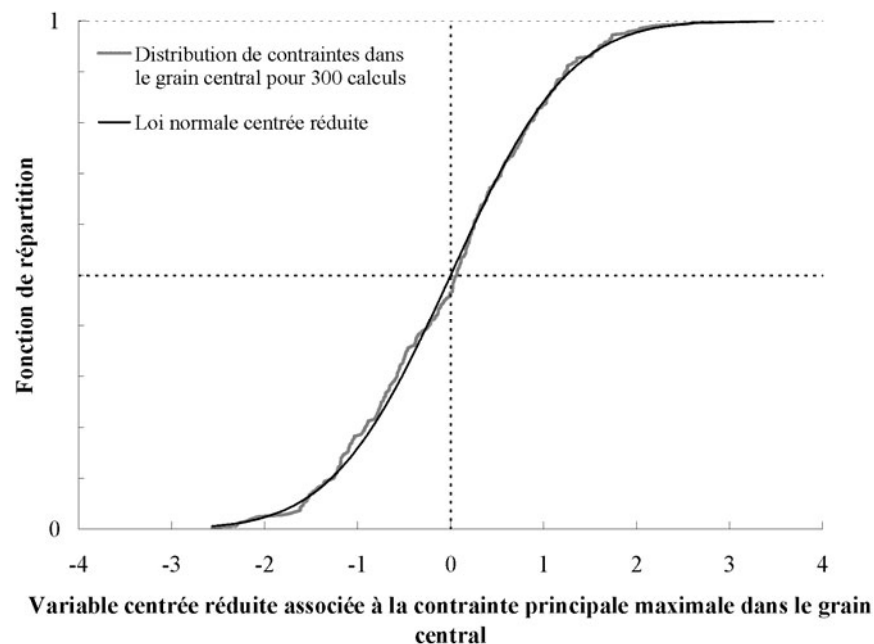
Une variable aléatoire  $X$  est *centrée* si sa moyenne, notée  $E(X)$ , est nulle, et elle est *réduite* si son écart type, noté  $\sigma(X)$ , vaut un. A toute variable aléatoire  $x$  d'écart type non nul, on peut donc associer une **variable aléatoire centrée réduite**  $X$  définie par :

$$X = \frac{x - E(x)}{\sigma(x)} \quad (3-6)$$

On classe les variables centrées réduites associées aux contraintes obtenues dans le grain central dans l'ordre croissant. On peut alors définir la fonction de répartition  $F$  associée à ces variables aléatoires  $X_i$  par :

$$F(X_i) = \frac{i}{N} \quad (3-7)$$

A titre d'illustration, la Figure 3-19 présente la comparaison entre la loi normale centrée réduite et la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central selon les orientations cristallines de ses voisins, pour une microstructure bidimensionnelle de 4578 grains soumise à un chargement de traction, et pour 300 réalisations.



**Figure 3-19 : Fonction de répartition de la contrainte principale maximale dans le grain central pour une microstructure 2D de 4578 grains et pour 300 tirages des orientations cristalline de ses voisins: comparaison à la loi normale centrée réduite**

La Figure 3-19 montre bien que la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central suit effectivement une loi normale, elle est donc complètement définie par sa moyenne et son écart type.



Par ailleurs, on souhaite évaluer la corrélation entre les dispersions observées d'une part sur la contrainte principale maximale et d'autre part sur la **contrainte principale minimale**. Pour cela, lors de l'étude précédente, la contrainte principale minimale a été relevée en même temps que la contrainte principale maximale dans le grain central pour chaque tirage. Le coefficient de corrélation entre les deux variables est de 0,8 : les **dispersions sont donc fortement corrélées**. Lorsque la dispersion sur la contrainte principale maximale augmente ou diminue, on observe les mêmes évolutions de la dispersion sur la contrainte principale minimale.

Pour une microstructure bidimensionnelle de 4578 grains, et pour 300 tirages d'orientations cristalline, on obtient les données suivantes pour les distributions de contraintes principales minimales et maximales dans ce grain central :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{moyenne}(\sigma_{\min}) = 12 \text{ MPa} \\ \text{écart-type}(\sigma_{\min}) = 12,7 \text{ MPa} \\ \frac{\text{écart-type}(\sigma_{\min})}{\text{moyenne}(\sigma_{\max})} = 7,7 \% \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{moyenne}(\sigma_{\max}) = 166 \text{ MPa} \\ \text{écart-type}(\sigma_{\max}) = 12,1 \text{ MPa} \\ \frac{\text{écart-type}(\sigma_{\max})}{\text{moyenne}(\sigma_{\max})} = 7,9 \% \end{array} \right. \quad (3-8)$$

Les écart-types des deux distributions, normalisés par la moyenne des contraintes principales maximales, sont égaux. Ceci a été vérifié pour les divers jeux de simulations numériques réalisés. Par conséquent, la dispersion  $\langle \sigma_{\max} \rangle$  sur la contrainte principale maximale suffit à elle-seule pour caractériser la fluctuation sur le tenseur des contraintes locales  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\max}$  par rapport aux contraintes moyennes macroscopiques  $\overline{\sigma_{\min}}$  et  $\overline{\sigma_{\max}}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= \overline{\sigma_{\min}} \pm \langle \sigma_{\max} \rangle \times \overline{\sigma_{\max}} \\ \sigma_{\max} &= \overline{\sigma_{\max}} (1 + \langle \sigma_{\max} \rangle) \end{aligned} \quad (3-9)$$

### 3.4.2. Influence des paramètres de calcul

Un certain nombre de paramètres sont susceptibles d'influencer le résultat de ces calculs. Une étude de sensibilité a été réalisée pour les trois paramètres principaux suivants :

- le nombre  $N$  de réalisations
- le nombre de grains dans le modèle de microstructure
- l'orientation cristalline du grain central

### 3.4.2.1. Sensibilité de la distribution au nombre $N$ de réalisations

Il a été justifié au paragraphe précédent que la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain milieu suivait une loi normale. Cependant l'écart entre la distribution calculée numériquement et la loi normale dépend du nombre de tirages aléatoires réalisés (Figure 3-20).

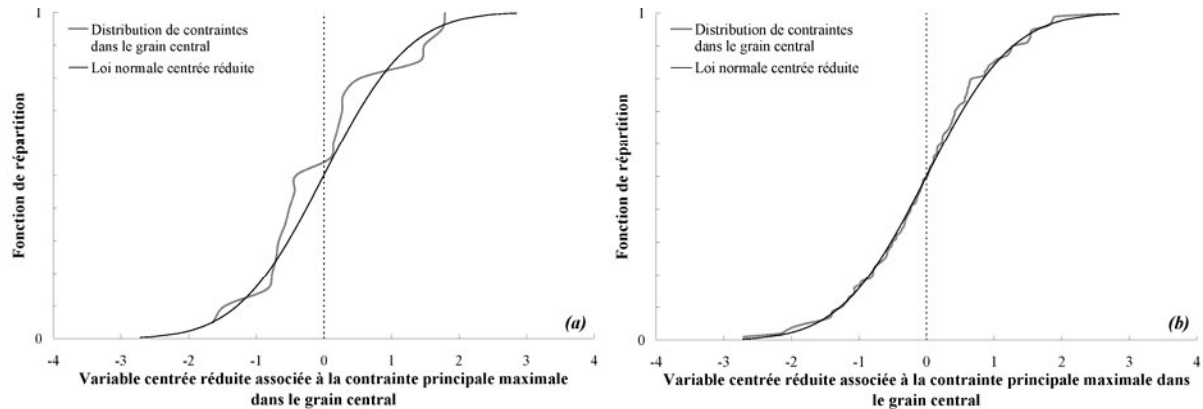


Figure 3-20 : Fonction de répartition de la contrainte principale maximale dans le grain central pour une microstructure 2D de 4578 grains : comparaison à la loi normale centrée réduite, (a) pour 20 tirages aléatoires, (b) pour 100 tirages aléatoires

Plus le nombre de réalisations est grand et plus l'estimation de la distribution est précise, mais par la même occasion plus le temps de calcul est grand. Il est donc nécessaire de trouver un **compromis entre temps de calcul et précision du résultat**.

On détermine donc l'écart entre la fonction de répartition calculée numériquement et la loi normale centrée réduite. L'écart type de ces écarts caractérise la précision de l'ajustement à la loi normale. Pour chacune des configurations étudiées, on a déterminé l'évolution de cet indicateur d'erreur en fonction du nombre  $N$  de réalisations.

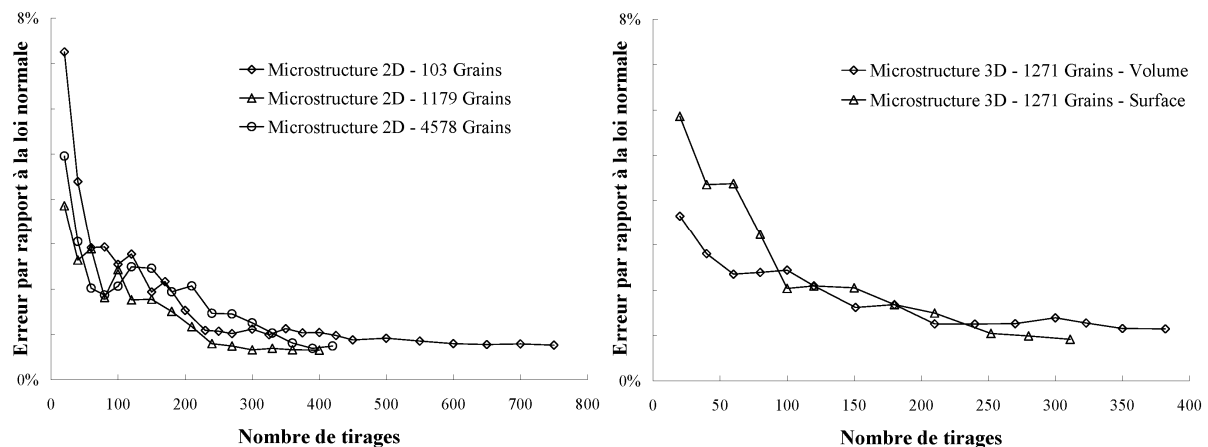


Figure 3-21 : Evolution de l'erreur par rapport à la loi normale en fonction du nombre de calculs

On observe en premier lieu que l'erreur dépend relativement peu de la dimension du modèle de microstructure choisi ce qui confirme que l'intensité de la fluctuation de la contrainte dans un grain est liée à la configuration de ses premiers voisins. Le plus petit modèle testé

comporte, en 2D comme en 3D, 5 voisins au minimum pour chaque grain dans chaque direction de l'espace.

On observe qu'au-delà de 300 tirages, l'erreur par rapport à la loi normale est stable et de l'ordre de 1% (Figure 3-21). Cette observation a été faite aussi bien pour les microstructures bidimensionnelles que pour les microstructures tridimensionnelles.

Par la suite, on caractérisera donc l'intensité de la fluctuation de la contrainte dans le grain central pour 300 jeux d'orientations cristallines distincts pour ses voisins.

#### 3.4.2.2. Sensibilité de la distribution au nombre de grains dans le modèle de microstructure

Dans les calculs effectués, on s'est assuré que le nombre de réalisations effectuées était suffisant pour caractériser précisément les paramètres de la loi normale. 300 réalisations sont suffisantes pour caractériser la moyenne et l'écart type de la contrainte principale maximale dans le grain central, dès que le nombre de grains dans le modèle de microstructure est supérieur à 100 en 2D et à 1000 en 3D. Cependant, les valeurs mêmes de ces paramètres pourraient être différents selon les modèles de microstructure selon les conditions aux limites.

On dispose de trois modèles bidimensionnels, comprenant respectivement 103, 1179 et 4578 grains. Pour une sollicitation de traction simple uniaxiale, et pour chaque modèle, on détermine les paramètres de la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central pour 300 jeux d'orientations des grains voisins. Les paramètres de la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central ainsi calculée sont consignés dans le Tableau 3-2. Afin de faciliter les comparaisons, on raisonne en terme d'écart type relatif, c'est-à-dire le rapport entre l'écart type de la distribution et sa moyenne.

Microstructure	2D – 103 grains	2D-1179 grains	2D – 4578 grains
Moyenne [MPa]	165,3	164,4	166,0
Ecart type relatif [%]	8,1	7,8	7,9

Tableau 3-2 : Paramètres de la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central pour trois microstructures 2D différentes

On constate que la moyenne ainsi que l'écart type relatif de la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central sont relativement stables et donc indépendants du nombre de grains dans la microstructure (Tableau 3-2).

Les calculs éléments finis réalisés au paragraphe 3.3.2 ont mis en évidence une organisation spatiale des contraintes locales pour les trois microstructures bidimensionnelles étudiées (103 grains, 1179 grains et 4578 grains). Ces résultats montrent que le plus petit modèle employé (103 grains) a une dimension suffisante vis-à-vis de l'échelle microstructurale supplémentaire mise en évidence – de l'ordre de cinq fois la taille de grain.

Ces résultats ont été obtenus uniquement pour les microstructures bidimensionnelles. Le temps de calcul nécessaire pour le modèle de microstructure tridimensionnel de 14688 grains étant de l'ordre de la journée, il n'était pas envisageable de calculer 300 réalisation distinctes des orientations cristallines pour ce modèle.... Cependant, les résultats obtenus pour les modèles bidimensionnels montrent que la moyenne et l'écart type obtenus pour le modèle bidimensionnel à 103 grain sont les mêmes que pour 1179 ou 4578 grains. On en conclut

donc qu'un modèle de microstructure tridimensionnel contenant 1271 grains suffit pour caractériser la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central.

### 3.4.2.3. Sensibilité de la distribution à l'orientation cristalline du grain

Lorsque l'on caractérise la dispersion de contraintes dans le grain central, l'orientation de ce dernier est fixée arbitrairement ( $\varphi_1=0$ ,  $\Phi=0$ ,  $\varphi_2=0$ ), tandis que l'on fait varier aléatoirement l'orientation des autres grains de la microstructure. L'étude menée ici a pour but d'évaluer l'influence de l'orientation du grain fixe sur la distribution de la contrainte principale maximale obtenue pour ce grain.

On considère une microstructure bidimensionnelle comprenant 103 grains. L'orientation du grain central est repérée par l'angle d'Euler  $\varphi_1$ , auquel on fait prendre successivement quatre orientations différentes dans l'intervalle  $[0, \pi/2]$  : 0,  $\pi/8$ ,  $\pi/4$  et  $3\pi/4$  radians. On détermine pour chaque cas la distribution de la contrainte principale maximale dans ce grain. Le nombre de tirages aléatoires est fixé à 300 et, dans chaque cas, les 300 textures ainsi générées sont les mêmes.

La contrainte principale maximale moyenne en traction simple par orientation cristalline dépend fortement de l'orientation cristalline considérée : pour un angle  $\varphi_1=\pi/4$ , la valeur de la moyenne de la distribution est 17% plus élevée que pour  $\varphi_1=0$  (Figure 3-22.a). L'écart type relatif de la distribution est, quant à lui, insensible à l'orientation cristalline du grain central (Figure 3-22.b).

Ceci se justifie simplement à l'aide de l'hypothèse d'ergodicité d'une part et d'élasticité d'autre part. Comme on est en élasticité, les influences respectives des orientations cristallines des voisins d'un grain, sur la contrainte principale maximale dans ce grain s'additionnent. En outre, la perturbation autour de la moyenne est linéaire de la contrainte moyenne (élasticité). Enfin, compte tenu de l'ergodicité du problème, la moyenne des actions d'un voisin sur le grain central d'un tirage à l'autre est égale à la moyenne spatiale des actions d'un voisin sur l'autre pour chaque tirage. **Ainsi l'écart type relatif autour de la moyenne doit être indépendant de l'orientation cristalline, tandis que la moyenne dépend en revanche de l'orientation du grain par rapport aux directions principales du chargement.**

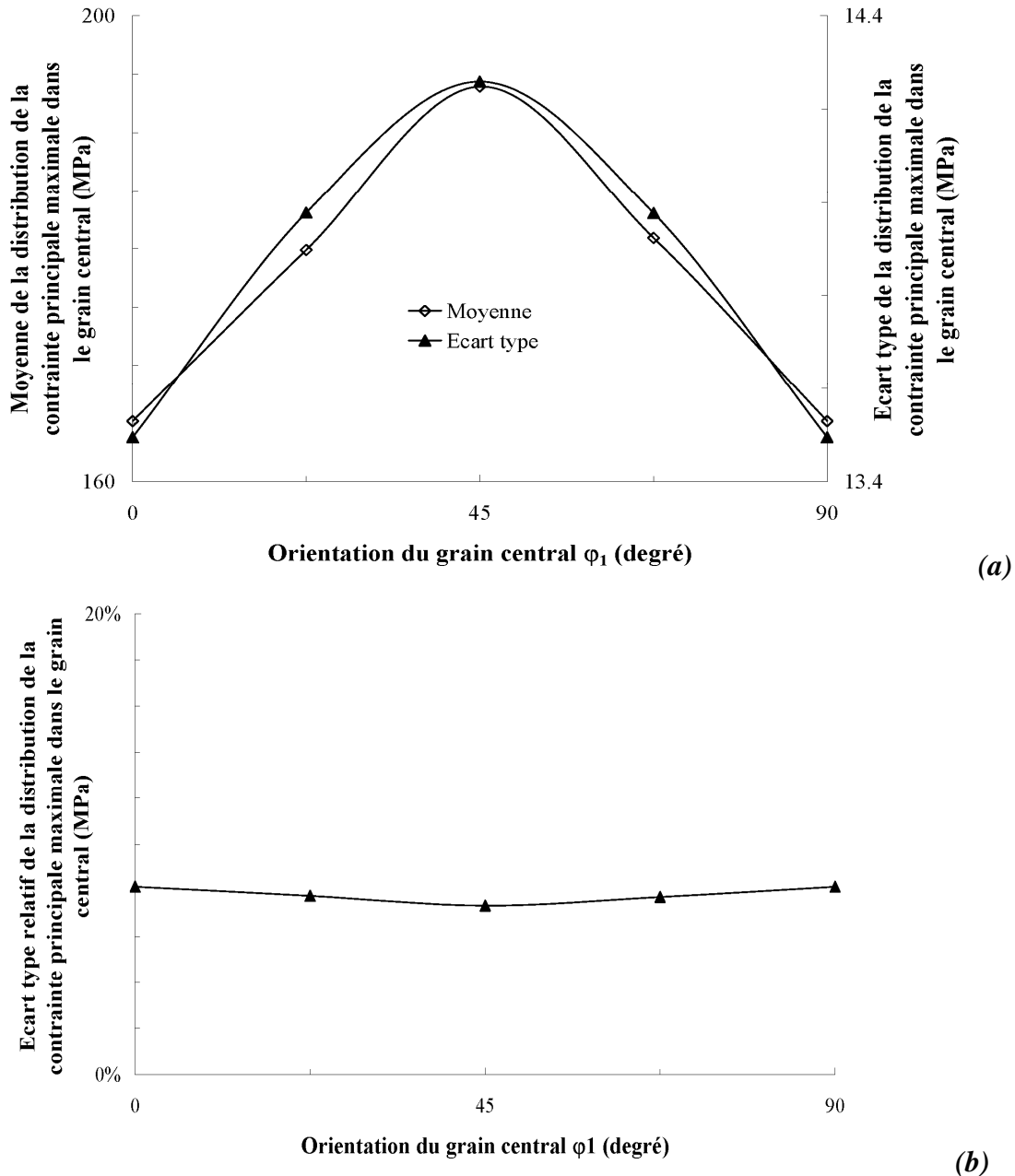


Figure 3-22 : Influence de l'orientation du grain central sur les paramètres de la distribution de contraintes dans ce grain. (a) moyenne et écart type. (b) écart type relatif

Cette propriété est très utile pour la suite. En effet, on souhaite utiliser ces résultats pour travailler ensuite à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à une échelle caractéristique représentative d'un très grand nombre de grains.

Si l'on note  $\sigma_o$  la contrainte principale maximale pour une orientation cristalline donnée,  $\overline{\sigma_o}$  sa moyenne selon les configurations de ses voisins et  $\delta$  son écart type relatif, alors la probabilité qu'un grain de cette orientation cristalline subisse une contrainte supérieure à  $\overline{\sigma_o}(1 + 3\delta)$  est de 0.25%.

Ceci est vrai pour chacune des orientations cristallines du milieu. Si maintenant on considère que la contrainte macroscopique moyenne  $\overline{\sigma}$  dans le matériau homogénéisé est la moyenne des contraintes pour chacune des orientations cristallines, la probabilité qu'une zone du

matériau homogénéisé de la dimension d'un grain subisse une contrainte macroscopique  $(1 + 3\delta)$  fois supérieure à la moyenne sera également de 0.25%.

### **3.4.3. Effet du chargement sur la fluctuation des contraintes dans le modèle éléments finis du polycristal**

Tout ce qui a été présenté dans le paragraphe précédent correspondait à un chargement macroscopique en traction simple uniaxiale. Dans cette partie, nous allons examiner le rôle de la nature multiaxiale du chargement sur la fluctuation de la contrainte principale dans un grain selon les orientations de ses voisins. Pour cela, les différents modèles de microstructures bidimensionnelles et tridimensionnelles présentées en Figure 3-7 sont utilisés. L'orientation du grain central est fixée ( $\phi_1=0$ ,  $\Phi=0$ ,  $\phi_2=0$ ) et on tire aléatoirement 300 jeux d'orientations cristalline pour les autres grains du modèle de microstructure.

Pour les microstructures tridimensionnelles, on fixera l'orientation cristalline de deux grains :

- le grain situé au centre du cube (volume)
- un grain situé au centre d'une des faces du cube (surface)

Cela nous permettra d'étudier l'effet d'une surface libre sur les distributions.

Pour les modèles bidimensionnels, on comparera les distributions obtenues soit avec une hypothèse de contraintes planes, soit avec une hypothèse de déformations planes.

#### **3.4.3.1. Chargements simples : traction et cisaillement**

Au vu des études de sensibilité conduites au paragraphe 3.4.2, les dispersions auraient pu être calculées indifféremment sur les trois microstructures bidimensionnelles proposées (103 grains, 1179 grains et 4578 grains). C'est naturellement le plus petit modèle qui a été choisi pour ces calculs.

Comme la plupart des calculs sont effectués en 2D, on s'est attaché à comparer les distributions pour le cas 3D et 2D déformations planes ou contraintes planes.

Pour les microstructures bidimensionnelles, on étudie par ailleurs l'influence de l'hypothèse de contraintes planes ou de déformations planes sur la dispersion calculée.

Pour la microstructure tridimensionnelle, on étudie l'influence de la position du grain fixe (surface ou volume) sur la dispersion calculée.

	<i>Traction</i>		<i>Cisaillement</i>	
	<i>Moyenne (MPa)</i>	<i>Ecart type (%)</i>	<i>Moyenne (MPa)</i>	<i>Ecart type (%)</i>
<b>Modèle 2D</b> <b>Contraintes Planes</b>	166	7,9	87	12.9
<b>Modèle 2D</b> <b>Déformations Planes</b>	203	<b>10,3</b>	90	<b>15.2</b>
<b>Modèle 3D</b> <b>Grain en surface</b>	192	6,4	107	10.35
<b>Modèle 3D</b> <b>Grain en volume</b>	201	7,8	107	9.17

**Tableau 3-3 : Contrainte moyenne et écart type relatif de la distribution de la contrainte principale maximale dans le grain central, en traction et en cisaillement, en 2D ou en 3D, pour une déformation moyenne de 1/1000.**

Si l'on regarde la distribution de la contrainte principale maximale en 3D et pour un grain en volume, que ce soit en traction uniaxiale ou en cisaillement, l'écart type de la distribution est nettement inférieur à celui obtenu avec l'hypothèse de déformations planes. En effet, le nombre de grains qui entourent un grain situé au cœur du matériau est plus grand en 3D qu'en 2D, ceci conduit à une variabilité plus faible de l'état de contrainte dans le grain en fonction de l'orientation de ses voisins. L'hypothèse 2D déformations planes n'est donc pas adaptée pour ce type de calculs.

Si l'on compare les cas de cisaillement (pression hydrostatique nulle) et de traction uniaxiale, on constate que l'écart type diminue lorsque la pression hydrostatique du chargement macroscopique augmente et ceci dans tous les cas.

Ceci est aussi à l'origine de petites différences en 3D entre un grain situé en surface ou en volume, qui ne subissent pas le même confinement, en particulier sur la valeur de la contrainte moyenne.

#### **3.4.3.2. Trajets de chargement avec différents taux de triaxialité**

La dispersion obtenue sur la composante maximale des contraintes principales dans le grain milieu est fonction de la nature du chargement, ainsi que nous avons pu le constater pour des chargements de traction et de cisaillement (Tableau 3-3). Nous allons donc étudier plus avant l'influence du chargement sur la distribution des contraintes locales. Pour ces calculs, on considère un modèle de microstructure bidimensionnel, contenant 103 grains, les constantes d'élasticité étant celles du Nickel. Les calculs sont effectués en contraintes planes. On détermine les distributions des contraintes principales dans le grain central selon la procédure établie au paragraphe 3.4.1.

Diverses configurations ont été étudiées, pour les simulations de traction-croisée, traction-compression et compression croisée, les directions principales du chargement macroscopique sont parallèles aux arêtes du carré. Pour les simulations de cisaillement, les directions

principales sont parallèles aux deux diagonales du carré. Nous vérifions ainsi, le rôle de la triaxialité du chargement et des surfaces libres du modèle.

Dans la pratique, trois trajets de chargement ont été appliqués au cube pour explorer le plan des contraintes ( $\sigma_1, \sigma_2$ ). Comme le problème est élastique le type de trajet est sans importance, il s'agit simplement de préciser les conditions concrètes des calculs:

- **Trajet de « Traction Croisée » :**

Lors du premier step du calcul, on sollicite la structure en traction uniaxiale suivant la direction  $y$ . Lors du deuxième step, on sollicite la structure en traction suivant la direction  $x$ , tandis que suivant la direction  $y$  on revient à l'origine. (Figure 3-23.a)

- **Trajet de « Traction Compression » :**

Lors du premier step, on sollicite la structure en traction uniaxiale suivant la direction  $y$ . Lors du deuxième step, on sollicite la structure en compression suivant la direction  $x$ , tandis que suivant la direction  $y$  on reste fixé à la position finale de la fin du premier step. (Figure 3-23.b)

- **Trajet de « Compression Croisée » :**

Lors du premier step, on sollicite la structure en compression uniaxiale suivant la direction  $y$ . Lors du deuxième step, on sollicite la structure en compression suivant la direction  $x$ , tandis que suivant la direction  $y$  on revient à l'origine. (Figure 3-23.c)

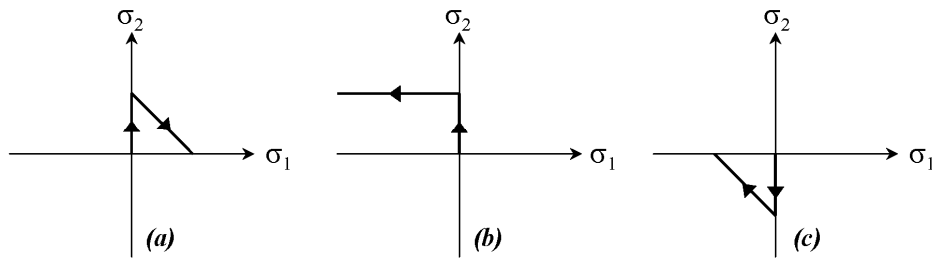


Figure 3-23 : Trajets de chargement étudiés  
(a) Traction Croisée, (b) Traction Compression, (c) Compression Croisée

Ces distributions suivent une loi normale et sont caractérisées par leur moyenne et leur écart type. Notons  $\overline{\sigma_{\min}}$  et  $\langle \sigma_{\min} \rangle$  les paramètres de la distribution de la composante minimale des contraintes principales, et  $\overline{\sigma_{\max}}$  et  $\langle \sigma_{\max} \rangle$  ceux de la distribution de la composante maximale des contraintes principales. On définit alors l'écart type relatif des contraintes principales de la manière suivante :

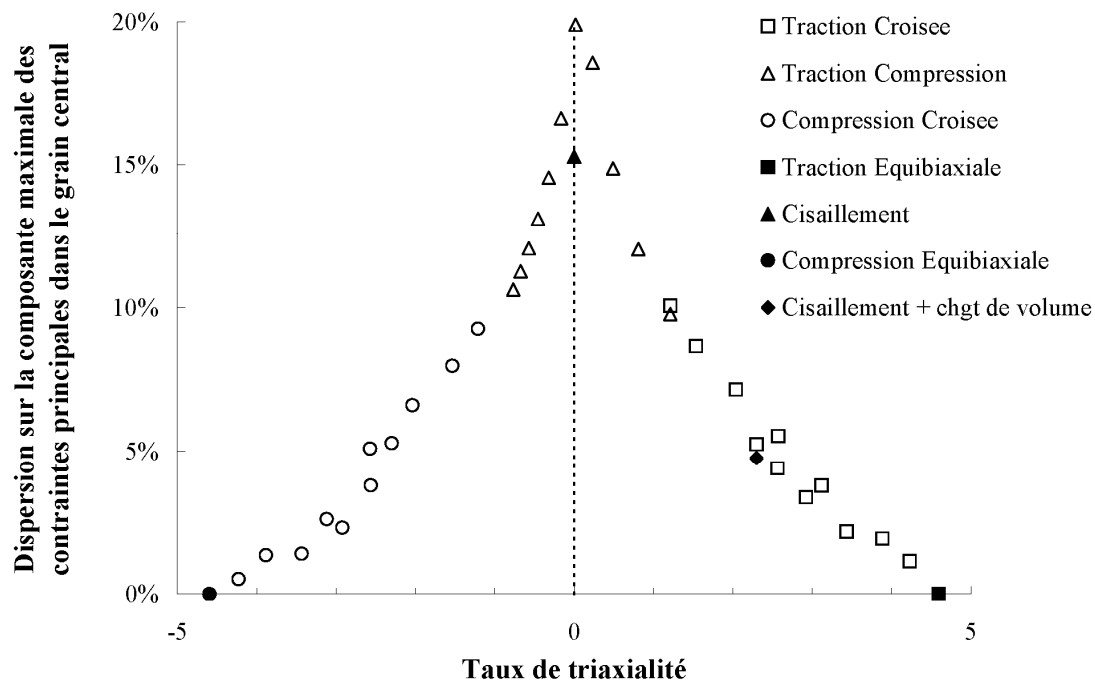
$$d_{\min} = \frac{\langle \sigma_{\min} \rangle}{\max(|\overline{\sigma_{\min}}|, |\overline{\sigma_{\max}}|)} \quad (3-10)$$

$$d_{\max} = \frac{\langle \sigma_{\max} \rangle}{\max(|\overline{\sigma_{\min}}|, |\overline{\sigma_{\max}}|)}$$

L'évolution de l'écart type relatif sur la composante maximale des contraintes principales ( $d_{\max}$ ) dans le grain central est tracée en fonction du taux de triaxialité du chargement (Figure 3-24), pour les trois trajets de chargement effectués. Le taux de triaxialité est défini comme le



rapport entre la pression hydrostatique et la contrainte de cisaillement maximale du chargement moyen macroscopique.



**Figure 3-24 : Evolution de l'écart type relatif de la distribution de la composante maximale des contraintes principales en fonction du taux de triaxialité du chargement, pour les constantes d'élasticité du Nickel**

L'écart type relatif de la distribution de la composante principale maximale de la contrainte dans le grain central dépend très fortement du taux de triaxialité des contraintes.

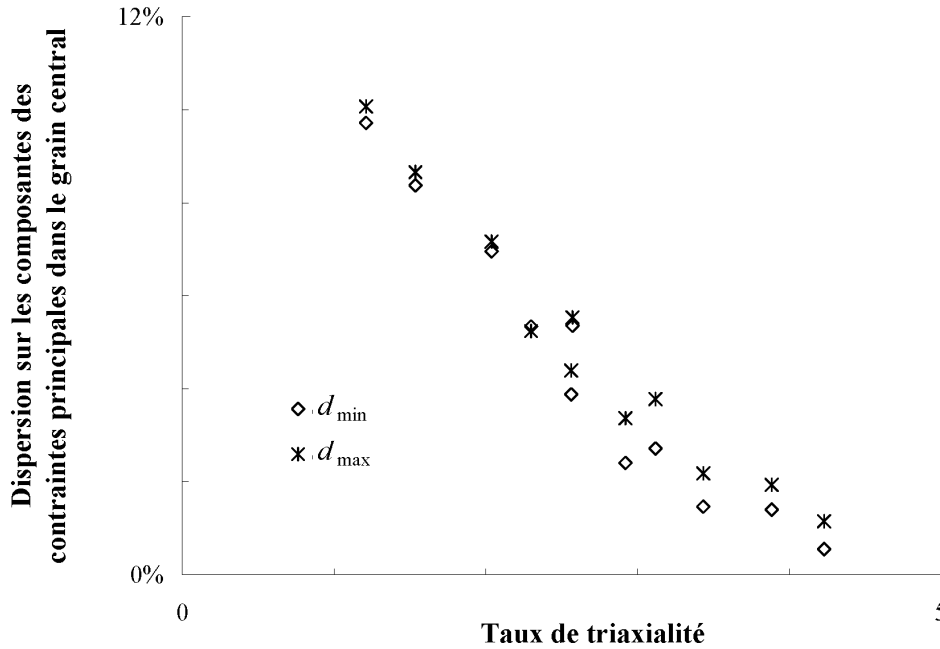
On observe une évolution de la dispersion conforme aux observations faites par Guriev et Bogdanov [Guriev et al.,1984], à savoir une augmentation continue depuis un chargement de traction équibiaxial jusqu'à un chargement de cisaillement : la dispersion maximale est obtenue pour un chargement de cisaillement pur, et la dispersion est nulle pour un chargement équibiaxial en 2D.

Prenons une déformation triaxiale. Elle est invariante par rotation et, en particulier, invariante selon la rotation entre l'orientation cristalline du grain et celle du repère macroscopique. Compte tenu de la symétrie cubique du nickel, la contrainte obtenue est donc également triaxiale. La même contrainte apparaît donc quelle que soit l'orientation cristalline du grain. Le même résultat est obtenu en 2D, sachant qu'alors la déformation est invariante par une rotation dans le plan (1,2) et compte tenu de la symétrie cubique du nickel. Ceci justifie le fait qu'il n'y a pas de fluctuation des contraintes locales pour une déformation macroscopique équibiaxiale en 2D ou triaxiale en 3D.

Entre le cisaillement pur et le chargement équibiaxial, les écarts types de la distribution des contraintes principales maximales s'alignent sur une même courbe (Figure 3-24).

On observe cependant de petites différences entre les cas de chargements de cisaillement et de traction-compression. En cisaillement pur, un écart type de 20% est trouvé en traction-compression, tandis qu'il est de 15% en cisaillement. Ceci est probablement dû aux

conditions aux limites au niveau des coins du modèle de microstructure (Figure 3-12, Figure 3-4) pour le chargement de cisaillement. Cependant, dès qu'un peu de pression hydrostatique est ajoutée (cisaillement + changement de volume) les écarts type obtenus sont tout à fait comparables.



**Figure 3-25 : Evolution des écart type relatif des distributions des composantes maximale et minimale des contraintes principales en fonction du taux de triaxialité du chargement, pour les constantes d'élasticité du Nickel, calculs bidimensionnels**

Si l'on compare maintenant les écarts types relatif des distributions de la composante principale minimale ( $d_{min}$ ) et de la composante principale maximale ( $d_{max}$ ) de la contrainte dans le grain central, on constate qu'ils ont une évolution identique en fonction du taux de triaxialité (Figure 3-25). Il est important de préciser que ce sont ici des écarts types relatif à la plus grande valeur absolue des composantes principales de la contrainte.

Ainsi, supposons un chargement macroscopique de compression uniaxiale. Selon les directions pour lesquelles la contrainte principale moyenne est nulle, la fluctuation ne sera pas nulle mais directement proportionnelle à la valeur absolue de la contrainte de compression appliquée macroscopiquement. C'est-à-dire que la compression appliquée dans une direction, induit de la tension dans 50% des grains selon les directions principales orthogonales à l'axe de compression.

D'après ce qui a été montré plus haut la forme suivante devrait être retenue pour les cas bidimensionnels en contrainte plane pour les fluctuations  $\langle \sigma_i \rangle$  sur chacune des directions principales du chargement macroscopique autour de leur moyenne notée  $\bar{\sigma}_i$  :

$$\langle \sigma_1 \rangle = k(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2), \quad \langle \sigma_2 \rangle = k(-\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) \quad (3-11)$$

Cette forme permet d'obtenir en contraintes planes, une fluctuation nulle pour un chargement equibiaxial et une valeur maximale en cisaillement pur. Entre les deux l'évolution de la fluctuation est linéaire du rapport  $p/\tau$ .

Cependant, cette forme n'est pas adaptée pour le cas général tridimensionnel. On propose donc, par analogie, la forme suivante pour les fluctuations  $\langle \sigma_i \rangle$  sur chacune des directions principales du chargement macroscopique autour de leur moyenne notée  $\bar{\sigma}_i$  :

$$\langle \sigma_1 \rangle = k \left( \bar{\sigma}_1 - \frac{\bar{\sigma}_2}{2} - \frac{\bar{\sigma}_3}{2} \right), \quad \langle \sigma_2 \rangle = k \left( -\frac{\bar{\sigma}_2}{2} + \bar{\sigma}_2 - \frac{\bar{\sigma}_3}{2} \right), \quad \langle \sigma_3 \rangle = k \left( -\frac{\bar{\sigma}_1}{2} - \frac{\bar{\sigma}_2}{2} + \bar{\sigma}_3 \right) \quad (3-12)$$

Cette forme permet d'obtenir une fluctuation nulle pour un chargement triaxial et une valeur maximale en cisaillement pur. L'intensité de la fluctuation en 3D pour un grain à coeur a été caractérisée pour le nickel et est de 7.8% autour de la moyenne en traction simple uniaxiale. La valeur de  $k$  à retenir est donc de 7.8%.

Des calculs similaires ont été effectués avec les constantes d'élasticité du Titane. Comme le laissait présager le faible coefficient d'anisotropie élastique ( $a = 1,3$ ), on obtient une fluctuation quasi nulle des contraintes locales : elle est de 2% seulement pour un chargement de cisaillement pur.

La fluctuation des contraintes locales est finalement la conséquence de deux comportements anisotropes :

- D'une part le matériau doit être anisotrope (on a vu pour le Titane, faiblement anisotrope, que la dispersion était très faible).
- D'autre part le chargement doit être anisotrope (on a vu que la dispersion était nulle pour un chargement equibiaxial).

Dans la suite de l'étude, l'hétérogénéité des propriétés mécaniques locales et la fluctuation des contraintes locales qui en découle est prise en compte dans le critère de non-propagation mis en œuvre au chapitre précédent. Ce critère ayant été identifié pour l'acier 30NCD16, nous avons donc évalué la fluctuation des contraintes locales pour ce matériau. Des calculs ont donc été conduits avec les constantes d'élasticité du Fer- $\alpha$ . Ce matériau présente la même symétrie cristalline que le Nickel (symétrie cubique) et le même coefficient d'anisotropie élastique ( $a=2,5$ ). L'évolution de l'intensité de la fluctuation en fonction de la pression hydrostatique est donc la même.

### 3.4.4. Synthèse sur l'intensité de la fluctuation des contraintes locales

On souhaite caractériser l'intensité de la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale. Cette fluctuation a deux sources, d'une part l'orientation cristalline du grain par rapport aux directions principales du chargement macroscopique, et d'autre part les orientations cristallines de ses voisins. Cette caractérisation s'appuie sur des modèles éléments finis de microstructures : l'orientation d'un grain central est fixée, tandis que les orientations des autres grains sont aléatoires. La répétition de cette opération un grand nombre de fois permet d'obtenir la distribution des contraintes locales pour une orientation cristalline donnée. Cette distribution suit une loi normale.

La sensibilité des résultats a été étudiée en fonction :

- *Du nombre de réalisations pour les orientations cristallines de voisins :*  
Un nombre de 300 tirages aléatoires constitue un bon compromis entre temps de calcul et précision du résultat.
- *De l'orientation cristalline du grain central :*  
L'écart type relatif de la distribution ne dépend pas de l'orientation cristalline du grain, sa moyenne en dépend.
- *Du nombre de grains dans le modèle de microstructure :*  
Dès lors que le nombre de grains dans le modèle éléments finis de la microstructure est supérieur aux échelles spatiales caractéristiques de la fluctuation, les paramètres de la distribution deviennent alors indépendants du nombre de grains de la microstructure.

La première échelle spatiale de la fluctuation est celle de la microstructure, à savoir le grain, mais on voit apparaître aussi une seconde échelle, qui structure les champs de contraintes locaux et qui est de l'ordre de 5 grains. Les grains surcontraints, sont alignés en bandes dont la largeur est de un grain et la longueur en général supérieure à 5 grains, la distance entre ces bandes est de l'ordre de 5 grains. La direction de ces bandes est celle des directions principales du chargement macroscopique.

L'intensité de la fluctuation dépend du coefficient d'anisotropie cristalline du matériau. Lorsque le matériau est isotrope, la fluctuation est nulle. De même, si le chargement est isotrope la fluctuation est nulle, tandis qu'elle est maximale en cisaillement pur. La distribution des contraintes principales pour une orientation cristalline d'un grain peut être représentée par une gaussienne, dont l'écart type relatif est une fonction du taux de triaxialité des contraintes. Enfin, un chargement macroscopique appliqué selon une direction principale induit une fluctuation sur les autres directions principales qui est proportionnelle à la valeur moyenne de la contrainte selon la première direction. On retient donc la forme suivante pour les fluctuations  $\langle \sigma_i \rangle$  sur chacune des directions principales du chargement macroscopique autour de leur moyenne notée  $\bar{\sigma}_i$  :

$$\langle \sigma_1 \rangle = k \left( \bar{\sigma}_1 - \frac{\bar{\sigma}_2}{2} - \frac{\bar{\sigma}_3}{2} \right), \quad \langle \sigma_2 \rangle = k \left( -\frac{\bar{\sigma}_2}{2} + \bar{\sigma}_2 - \frac{\bar{\sigma}_3}{2} \right), \quad \langle \sigma_3 \rangle = k \left( -\frac{\bar{\sigma}_1}{2} - \frac{\bar{\sigma}_2}{2} + \bar{\sigma}_3 \right)$$

### 3.5. Implantation dans le critère

La fluctuation des contraintes locales, caractérisée au chapitre 3.4, entraîne une dispersion des facteurs d'intensité des contraintes ainsi que de la contrainte  $T$  en pointe de fissure. Etant donnée l'échelle spatiale de la fluctuation des contraintes locales, la fluctuation du facteur d'intensité des contraintes en fonction de la position et de la dimension de la fissure doit décroître lorsque la dimension de la fissure augmente et devrait tendre vers zéro lorsque la dimension de la fissure est bien supérieure à l'échelle spatiale de la fluctuation des contraintes. On va donc chercher à **caractériser l'évolution de la fluctuation des facteurs d'intensité des contraintes en fonction de la dimension et de la position de la fissure**, de façon à l'implanter dans le critère.

#### 3.5.1. Dispersion sur le facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure

Dans un premier temps, on considère le problème de Griffith : une fissure traversante dans une plaque bi-dimensionnelle infinie, dans le plan  $(x,y)$ , sollicitée en traction dans la direction  $y$ . L'étude menée au chapitre 3.3, a permis de caractériser l'échelle spatiale de la fluctuation des contraintes locales, et dans le cas des constantes d'élasticité du nickel, la période  $\lambda$  est de cinq fois la taille de grain. Par ailleurs on a montré au chapitre 3.4 que la distribution des contraintes locales suivait une loi normale, et pouvait donc être caractérisée par sa moyenne, notée  $\bar{\sigma}$ , et son écart type, noté  $\langle\sigma\rangle$ .

Pour un problème bidimensionnel, on peut alors schématiser la fluctuation de la composante maximale des contraintes principales dans la direction  $x$ , orthogonale à la direction de traction, par une fonction sinusoïdale :

$$\sigma(x) = \bar{\sigma} + \langle\sigma\rangle \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \quad (3-13)$$

Considérons maintenant une fissure traversante dans le plan de normale  $y$ , de longueur  $2a$  et centrée en  $x_0$ . Selon la position et la longueur de la fissure, la fluctuation des contraintes locales entraîne une fluctuation du facteur d'intensité des contraintes.

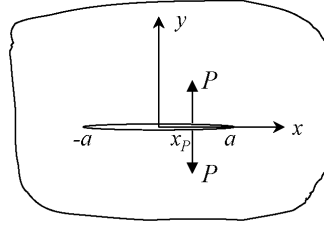
Deux approches permettent de déterminer cette fluctuation :

- Calcul de  $K_I$  par superposition de fonctions de poids.
- Calcul de  $K_I$  en utilisant la contrainte moyenne sur la longueur de fissure.

La première solution est la plus exacte. La seconde est cependant plus simple d'application. On va comparer les résultats obtenus dans chaque cas.

Si l'on considère une charge ponctuelle  $P$  en  $x = x_p$  sur le front de fissure (Figure 3-26), le facteur d'intensité des contraintes en mode I en pointe de fissure (i.e en  $x = a$  ou  $x = -a$ ) s'exprime comme suit [Irwin,1957] :

$$\{K_I\}_{\pm a} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a \pm x_p}{a \mp x_p}} \quad (3-14)$$


 Figure 3-26 : Fissure traversante soumise à une charge ponctuelle  $P$ 

**Par superposition**, pour une fissure traversante de taille  $2a$  et centrée en  $x_0$ , soumise au champ de contraintes locales  $\sigma(x)$  donné par l'équation (3-13), le facteur d'intensité des contraintes en mode I en pointe de fissure se calcule selon la formule :

$$\{K_I\}_a = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \left( \sigma(x - x_0) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \right) dx \quad (3-15)$$

Ainsi,  $K_I$  est fonction d'une part de la taille de fissure  $a$ , et d'autre part de la position de la fissure dans la structure, repérée par  $x_0$ . Son expression est la suivante :

$$K_I(a, x_0) = \sqrt{\pi a} \bar{\sigma} \left\{ 1 + \frac{\langle \sigma \rangle}{\sigma} J_1 \left( 2\pi \frac{a}{\lambda} \right) \cos \left( 2\pi \frac{x_0}{\lambda} \right) - \frac{\langle \sigma \rangle}{\sigma} J_0 \left( 2\pi \frac{a}{\lambda} \right) \sin \left( 2\pi \frac{x_0}{\lambda} \right) \right\} \quad (3-16)$$

où  $J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel.

Pour une taille de fissure donnée, le facteur d'intensité des contraintes en mode I varie en fonction de la valeur de  $x_0$ . On note  $\langle K_I \rangle$  la demi-plage de variation de  $K_I$  en fonction de la position du centre de la fissure :

$$\langle K_I \rangle(a) = \frac{1}{2} \left( \max_{x_0} \{K_I(a, x_0)\} - \min_{x_0} \{K_I(a, x_0)\} \right) \quad (3-17)$$

Ainsi la dispersion calculée par superposition pour le facteur d'intensité des contraintes est la suivante :

$$\langle K_I \rangle(a)_{analytique} = \langle \sigma \rangle \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{J_0 \left( 2\pi \frac{a}{\lambda} \right)^4}{J_0 \left( 2\pi \frac{a}{\lambda} \right)^2 + J_1 \left( 2\pi \frac{a}{\lambda} \right)^2}} \quad (3-18)$$

Maintenant, intéressons-nous à la seconde solution. Plutôt que d'employer la méthode de superposition, nous allons calculer  $K_I$  à partir de la moyenne de la contrainte sur la fissure :

$$K_I(a, x_0) = \sigma_{\text{moy}}(a, x_0) \sqrt{\pi a} \quad \text{avec} \quad \sigma_{\text{moy}} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \sigma(x - x_0) dx \quad (3-19)$$

Avec cette méthode, l'expression de  $K_I$  est la suivante :

$$K_I(a, x_0) = \sqrt{\pi a} \bar{\sigma} \left\{ 1 + \frac{\langle \sigma \rangle}{\bar{\sigma}} \sin\left(2\pi \frac{x_0}{\lambda}\right) \frac{\sin\left(2\pi \frac{a}{\lambda}\right)}{2\pi \frac{a}{\lambda}} \right\} \quad (3-20)$$

D'après l'équation (3-17), la dispersion du facteur d'intensité des contraintes, calculée à partir de la **moyenne des contraintes sur la fissure**, a pour expression :

$$\langle K_I \rangle(a)_{\text{moyenne}} = \langle \sigma \rangle \sqrt{\pi a} \left[ \frac{\sin\left(2\pi \frac{a}{\lambda}\right)}{2\pi \frac{a}{\lambda}} \right] \quad (3-21)$$

Ainsi selon la position de la fissure vis-à-vis de la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale, on observe une fluctuation du facteur d'intensité des contraintes. On constate que la décroissance de la dispersion en fonction de la taille de fissure dépend de la méthode utilisée pour calculer le facteur d'intensité des contraintes. Ainsi, lorsque l'on calcule  $K_I$  à partir de la moyenne des contraintes sur la fissure, on observe une décroissance de la dispersion sur  $K_I$  en fonction de la taille de fissure proportionnelle à  $1/a$ , tandis que lorsque l'on calcule  $K_I$  par superposition, la décroissance observée est proportionnelle à  $1/\sqrt{a}$  (Figure 3-27).

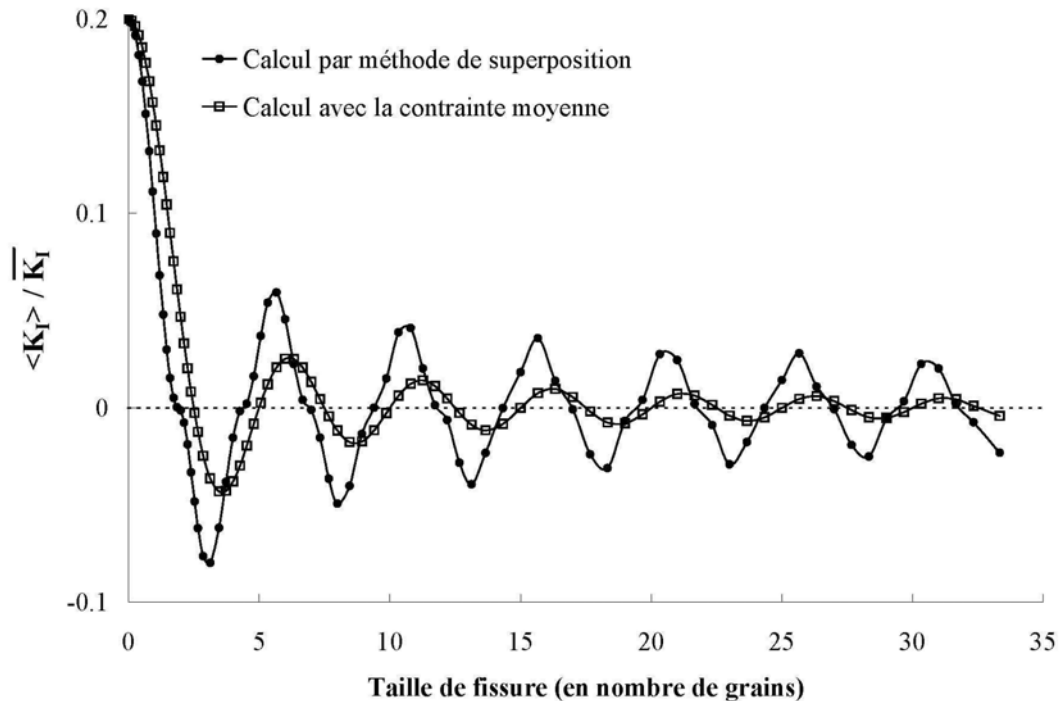


Figure 3-27 : Evolution de la fluctuation sur  $K_I$  en fonction de la taille de fissure.

Nous allons vérifier que le rapport en  $\sqrt{a}$  observé entre les deux méthodes ne dépend pas de la formulation en sinus imposée pour le chargement. On se place donc dans le cas général d'un chargement issu d'un calcul de microstructure par éléments finis. Pour cela on considère le cas test bidimensionnel, contenant 4578 grains, soumis à une sollicitation de traction. On extrait les contraintes sur une ligne de la microstructure (Figure 3-28).

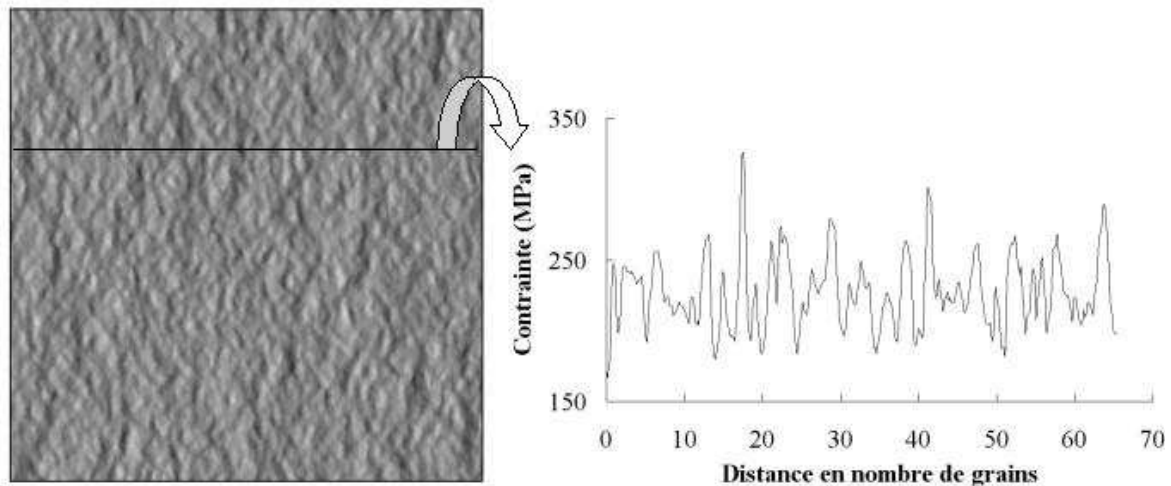
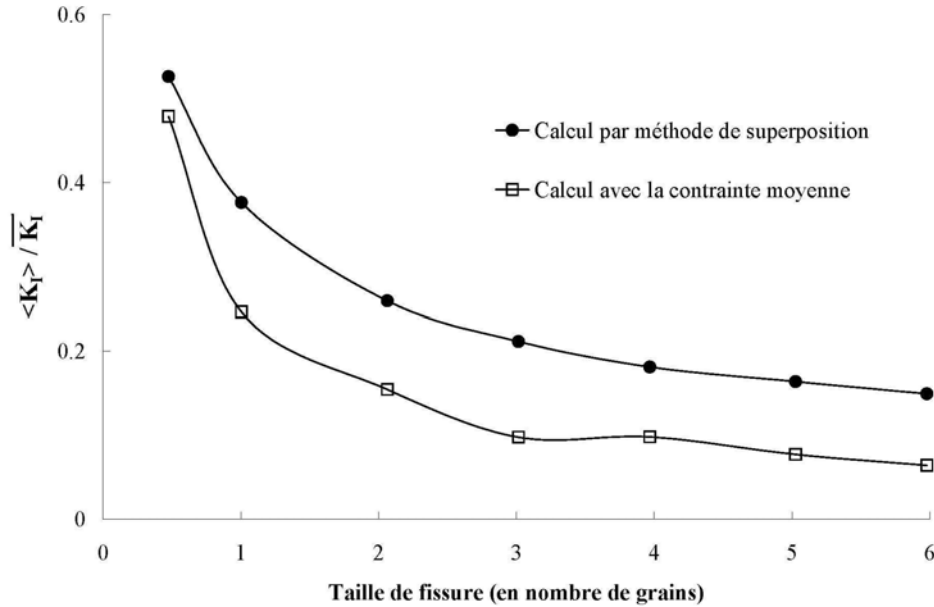


Figure 3-28 : Extraction du chargement vu par la fissure traversante.

La fluctuation sur le facteur d'intensité des contraintes est calculée avec les deux méthodes proposées : par la méthode de superposition et par un calcul issu de la contrainte moyenne sur la fissure. On considère des fissures de tailles différentes ( $a$  compris entre 1/2 grain et 6 grains), dont on fait varier la position du centre. La fluctuation sur  $K_I$  est alors la différence



entre les valeurs maximales et minimales obtenues pour les différentes positions du centre explorées.



**Figure 3-29 : Evolution de la fluctuation sur  $K_I$  en fonction de la taille de fissure, pour un chargement calculé sur une microstructure modélisée par éléments finis.**

On vérifie bien sur la Figure 3-29 que la fluctuation n'est pas la même lorsqu'elle est calculée par méthode de superposition ou bien à partir de la contrainte moyenne. Avec la méthode de superposition, la fluctuation décroît proportionnellement à  $1/\sqrt{a}$ , tandis que le calcul issu de la contrainte moyennée sur la fissure conduit à une décroissance proportionnelle à  $a^{-0.8}$ . Par la suite, il est donc justifié de supposer un rapport proportionnel à  $\sqrt{a}$  entre les deux méthodes.

### 3.5.2. Dispersion sur la surface seuil du critère de non-propagation

Le calcul par superposition n'est possible que dans un nombre limité de cas pour lesquels on dispose effectivement d'une formule analytique pour les fonctions de poids. Mais pour des cas plus complexes, et notamment pour le calcul de la contrainte T, le calcul analytique devient inaccessible, on va donc devoir faire certaines approximations pour déterminer la dispersion sur la surface seuil du critère de non-propagation induite par la fluctuation des contraintes locales.

Le facteur d'intensité des contraintes peut s'écrire comme suit :

$$K_I(a) = \overline{K_I}(a) \pm \langle K_I \rangle(a) \quad \text{avec} \quad \overline{K_I}(a) = \overline{\sigma} \sqrt{\pi a} \quad (3-22)$$

Dans le cas de la fissure traversante étudiée au paragraphe précédent, la dispersion sur  $K_I$  est connue analytiquement, et notée  $\langle K_I \rangle_{\text{analytique}}$ , par opposition à  $\langle K_I \rangle_{\text{moyenne}}$  calculée à partir de la moyenne des contraintes sur la fissure. On a vu que l'on avait le rapport suivant entre ces deux quantités :

$$\langle K_I \rangle(a) = \langle K_I \rangle_{analytique}(a) \approx 0,85 \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} a \langle K_I \rangle_{moyenne}(a) \quad (3-23)$$

On suppose que l'on peut appliquer ce rapport au calcul de la contrainte T. Si l'on note  $\langle T \rangle_{moyenne}$  la dispersion sur la contrainte T obtenue à partir de la moyenne des contraintes sur la fissure, on fait alors l'hypothèse suivante :

$$\langle T \rangle(a) \approx 0,85 \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} a \langle T \rangle_{moyenne}(a) \quad (3-24)$$

Pour une fissure traversante soumise à une contrainte de traction uniaxiale  $S_y$ , la contrainte T s'exprime :

$$T = -S_y \quad (3-25)$$

On considère dans notre cas que la contrainte de traction est la moyenne des contraintes locales sur la fissure, notée  $\sigma_m$ , ainsi on obtient :

$$\langle T \rangle_{moyenne}(a) = \frac{1}{2} \left( \max_{x_0} \sigma_m(a, x_0) - \min_{x_0} \sigma_m(a, x_0) \right) = \langle \sigma \rangle \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} a\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} a} \quad (3-26)$$

$$\text{avec } \sigma_m = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \sigma(x - x_0) dx$$

Connaissant les dispersions sur le facteur d'intensité des contraintes en mode I d'une part, et sur la contrainte T d'autre part, on peut alors déterminer la dispersion sur la surface seuil du critère de non-propagation, dont on rappelle l'expression :

$$\left( \frac{K_I}{K_{IS}} \right)^2 + \left( \frac{T}{T_S} \right)^2 + f_v \left( \frac{K_I}{K_{IS}} \right) \left( \frac{T}{T_S} \right) = 1 \quad (3-27)$$

Les valeurs maximales et minimales prises par  $K_I$  et T du fait de leurs fluctuations dues à l'hétérogénéité des contraintes locales permettent de déterminer les contraintes seuil maximale et minimale de non-propagation (Figure 3-30). Ces seuils sont bien évidemment fonction de l'intensité de la fluctuation.

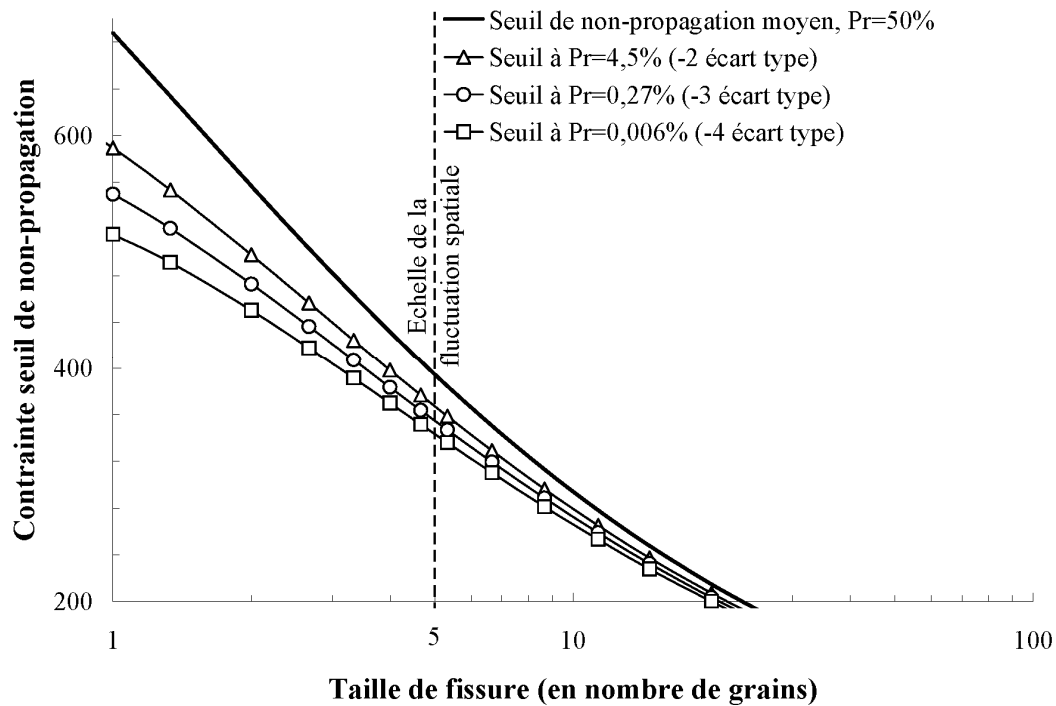


Figure 3-30 : Seuil de non-propagation isoprobable tracé en fonction de la taille de fissure, pour diverses probabilités. L'écart type choisi est celui identifié pour le Nickel : 7,8% en uniaxial en 3D pour un grain en volume.

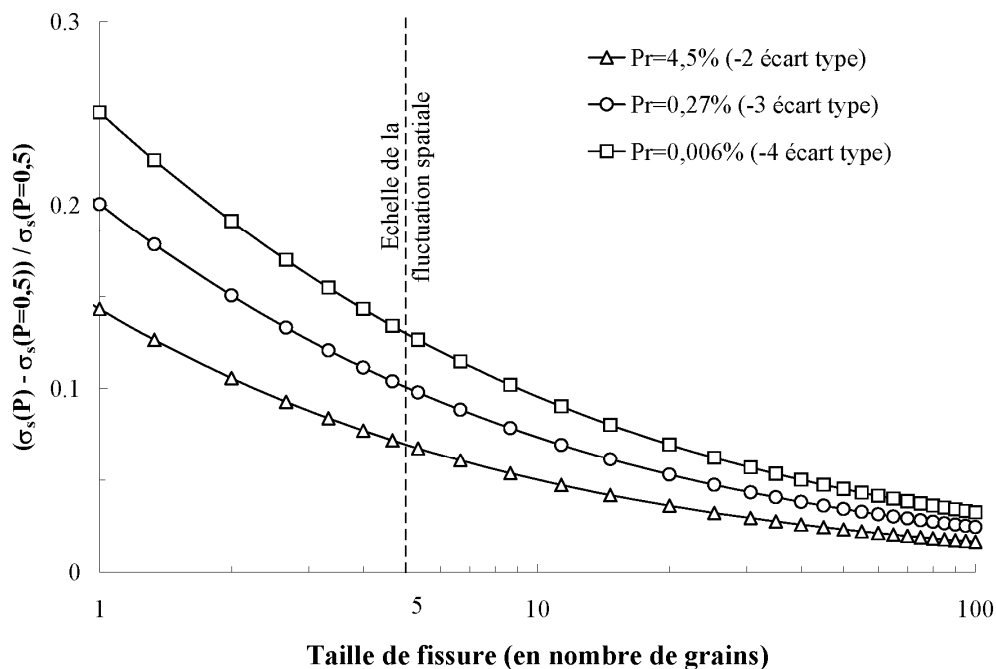


Figure 3-31 : Ecart à la moyenne sur le seuil de non-propagation isoprobable tracé en fonction de la taille de fissure, pour diverses probabilités. L'écart type choisi est celui identifié pour le Nickel : 7,8% en uniaxial en 3D pour un grain en volume.

Ainsi pour une fissure de taille  $a = 1$  grain, la dispersion observée sur le seuil est du même ordre de grandeur que la fluctuation des contraintes locales : pour une probabilité de rupture de 4,5% (c'est-à-dire moins deux écart type), la contrainte seuil de non-propagation est inférieure à la contrainte moyenne de 15% (Figure 3-31).

On vérifie bien que l'effet de la fluctuation des contraintes locales se dissipe naturellement lorsque la taille de fissure augmente, mais reste visible pour une dimension de défauts de l'ordre de dix tailles de grain.

### **3.5.3. Synthèse sur les effets probabilistes à l'échelle microstructurale.**

Lorsque la dimension des défauts est commensurable à l'échelle de la microstructure, la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale peut introduire une fluctuation de la probabilité d'amorçage des fissures de fatigue.

Cette fluctuation a été étudiée en s'appuyant sur des calculs par éléments finis de modèles de polycristaux 2D et 3D. Les calculs ont été effectués en élasticité, puisqu'en endurance, le matériau travaille dans son domaine d'élasticité macroscopique.

L'objectif de cette étude est de caractériser spatialement cette fluctuation et ses conséquences sur le critère de non-propagation des défauts selon leur taille. Les calculs ont donc porté sur des modèles de microstructure contenant un grand nombre de grains. Ces calculs ont permis de montrer que la fluctuation des contraintes est auto-organisée dans le polycristal et que son échelle spatiale est de l'ordre de cinq tailles de grains.

Par ailleurs, la distribution de la contrainte principale maximale dans un grain selon la configuration de ses premiers voisins suit une loi normale dont l'écart type dépend de l'anisotropie élastique du matériau et de l'anisotropie du chargement. Un chargement hydrostatique n'engendre pas de fluctuation de contraintes dans le polycristal.

Cette fluctuation de contraintes d'origine microstructurale se traduit par une dispersion du facteur d'intensité des contraintes et de la contrainte  $T$  d'un défaut potentiel de taille donnée. Cela conduit à une dispersion sur le seuil de non-propagation des fissures. Lorsque la taille de défaut est comparable à la taille des grains, l'ordre de grandeur de la dispersion du seuil est comparable à l'ordre de grandeur de la fluctuation des contraintes locales. L'échelle spatiale de cette fluctuation étant de l'ordre de 5 grains, la dispersion du seuil de non-propagation reste notable pour des dimensions de défauts d'une dizaine de grains.

Cette dispersion d'origine microstructurale vient se cumuler à la dispersion associée à la dimension des défauts. Ce cumul n'a pas été implanté dans la chaîne de calcul mais les résultats obtenus montrent l'intérêt d'un tel cumul.



## CONCLUSION

Une analyse des mécanismes de rupture par fatigue met en évidence le rôle des défauts sur la dispersion des durées de vie en fatigue. La limite de fatigue dépend fortement de la présence de défauts (Kitagawa et Takahashi). On distingue habituellement deux domaines : le domaine des petits défauts, pour lequel prévalent des modèles d'endurance exprimés en contrainte, et le domaine des grands défauts, pour lequel la mécanique linéaire élastique de la rupture est généralement employée. Le domaine de validité de ces modèles est restreint, s'ils sont étendus hors de leur domaine de validité ils surestiment, dans les deux cas, fortement la limite d'endurance.

Lorsque la distribution des dimensions de défauts couvre les deux domaines, ou que deux populations de défauts, en compétition, sont situées dans l'un et l'autre des deux domaines, un critère continu devient nécessaire.

Ces observations nous ont conduit à développer un critère de fatigue qui soit applicable à la plus large gamme possible de tailles de défaut. L'objectif fixé était de bénéficier des avantages respectifs des deux familles de modèles : une cohérence avec la mécanique linéaire de la rupture pour les grands défauts, une utilisation explicite des courbes de propreté des matériaux et un traitement des chargements multiaxiaux.

Le critère proposé est fondé sur les hypothèses suivantes : on suppose que le matériau contient des défauts que l'on assimile à des fissures et on détermine le seuil de non-propagation de ces fissures. On fait l'hypothèse qu'il n'y aura pas propagation en deçà d'un seuil de déformation plastique dans la région en pointe de fissure, c'est-à-dire tant que l'énergie élastique de cisaillement en pointe de fissure reste en deçà d'une valeur critique. Cette énergie est calculée à partir des champs de la mécanique linéaire élastique de la rupture, en prenant en compte la contrainte  $T$ , premier terme non-singulier du développement asymptotique des champs de contrainte en pointe de fissure. Ce formalisme assure bien évidemment une cohérence avec les modèles basés sur la mécanique linéaire élastique de la rupture pour les grands défauts, mais il présente aussi l'avantage de s'adapter aux petits défauts ainsi qu'aux chargements multiaxiaux grâce à l'introduction de la contrainte  $T$ .

A ce stade de l'étude, une partie des objectifs fixés sont dorénavant et déjà remplis. Le critère de non-propagation établi s'applique sur une large gamme de tailles de défauts, les chargements multiaxiaux peuvent être considérés et il fait intervenir explicitement un paramètre de taille de défaut permettant de prendre en compte les courbes de propreté matériau.

Afin d'en déduire le risque de rupture, la caractéristique probabiliste de la présence de défauts dans un volume de matière donné a été intégré dans le critère. La probabilité de rupture d'un élément de volume est alors la probabilité de trouver un défaut de taille critique, au sens du critère. La probabilité de rupture de la pièce est déterminée à partir de l'hypothèse du maillon faible. Le critère a été programmé dans la chaîne de calcul de Snecma et peut donc être appliqué à des calculs de structure industriels. Nous disposons donc désormais d'un outil permettant d'estimer la probabilité de rupture d'une pièce pour un chargement donné, connaissant la population de défauts du matériau.

Cependant, on observe que pour certains matériaux, le caractère aléatoire de la présence de défauts ne suffit pas à reproduire fidèlement la dispersion des durées de vie obtenues

expérimentalement. C'est le cas notamment pour les matériaux dont les tailles de défauts sont du même ordre de grandeur que la microstructure. Or on sait que pour les matériaux polycristallins, les propriétés mécaniques microscopiques peuvent être fortement hétérogènes du fait des incompatibilités de déformation entre un grain et ses voisins, incompatibilités dues aux différentes orientations cristallines. La dernière partie de notre étude s'est donc centrée sur l'analyse de la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale et son influence sur la dispersion des contraintes seuils de non-propagation des défauts.

Dans un premier temps, des simulations numériques de modèles de microstructures ont permis de mettre en évidence une organisation spatiale de la fluctuation des contraintes selon les directions principales du chargement macroscopique, et à une échelle supérieure à la taille de grain. Ainsi pour le Nickel, l'échelle spatiale de fluctuation des contraintes locales a été estimée à cinq fois la taille de grain. Cette observation est loin d'être anodine pour le calcul du risque de rupture par fatigue. La propagation d'un défaut dont la taille est comparable à l'échelle spatiale des fluctuations des contraintes ne pourra pas être décrite uniquement par les grandeurs macroscopiques. Dans ce cas, la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale doit être intégrée au modèle probabiliste. Lorsque les défauts sont petits, le seuil de non-propagation est indépendant de leur taille, en revanche il dépend de leur position vis-à-vis de la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale.

Il est évident que le calcul de microstructure ne peut pas être réalisé à l'échelle de la pièce. Dans un deuxième temps nous avons donc étudié ces fluctuations des contraintes locales de manière à les modéliser comme une distribution statistique autour de la contrainte moyenne dans l'élément de volume obtenue lors de calculs par éléments finis standards.

Les contraintes principales moyennes dans un grain fluctuent spatialement avec une période de cinq grains (pour le nickel) et en intensité selon une loi normale. L'intensité de la fluctuation dépend de l'anisotropie du comportement et du chargement. Elle est nulle pour un chargement hydrostatique et maximale en cisaillement pur. Ceci fait apparaître un effet de la pression hydrostatique dans le critère.

La fluctuation de contraintes d'origine microstructurale se traduit par une dispersion du facteur d'intensité des contraintes et de la contrainte  $T$  d'un défaut potentiel de taille donnée. Cela conduit à une dispersion sur le seuil de non-propagation des fissures. Lorsque la taille de défaut est comparable à la taille des grains, l'ordre de grandeur de la dispersion du seuil est comparable à l'ordre de grandeur de la fluctuation des contraintes locales. L'échelle spatiale de cette fluctuation étant de l'ordre de 5 grains, la dispersion du seuil de non-propagation reste notable pour des dimensions de défauts d'une dizaine de grains.

De nombreuses perspectives s'ouvrent à l'issue de cette étude. Tout d'abord il est évident qu'une validation sur des cas tests industriels est indispensable. Cela permettra de valider l'identification du critère de non-propagation ainsi que le processus de calcul de rupture. Pour cela, il faudrait disposer d'une base de données d'essai suffisante...

Il faudrait également implémenter le cumul des effets probabilistes liés à aux fluctuations d'origine microstructurale et à la dimension des défauts afin de pouvoir simuler les effets multiaxiaux, les effets de gradients et les effets d'échelle qui pourront en découler.

Par ailleurs, les effets de rapport de charge, les effets d'histoire du chargement et d'autres effets liés à la superposition de divers chargements n'ont pas été étudiés. Le critère devrait pouvoir être étendu à ces cas en supposant que le domaine d'élasticité de la région en pointe de fissure se déplace en suivant le trajet de chargement.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**Alexandre F. (2004)**

Aspects probabilistes et microstructuraux de l'amorçage des fissures de fatigue dans l'alliage INCO 718. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2004.

**Banvillet A., Palin-Luc T., Lasserre S. (2003)**

A volumetric energy based high multiaxial fatigue criterion. International Journal of Fatigue, Volume 25, 2003, pp 755-769.

**Barbe F., Decker L., Jeulin D., Cailletaud G. (2001)**

Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. Part 1: F.E. model. International Journal of Plasticity, Volume 17, 2001, pp 513-536.

**Barbe F., Forest S., Cailletaud G. (2001)**

Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. Part 2: Results. International Journal of Plasticity, Volume 17, 2001, pp 537-563.

**Bathias C., Bâillon J.P. (1980)**

La fatigue des matériaux et des structures.

**Beremin F.M. (1983)**

A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. Metallurgical Transactions A, Volume 14A, 1983, pp 2277-2287.

**Beretta S. (2003)**

Application of multiaxial fatigue criteria to materials containing defects. Fatigue and Fracture of Engineering Material and Structure, Volume 26, 2003, pp 551-559.

**Billaudeau T., Nadot Y., Bezine G. (2004)**

Multiaxial fatigue limit for defective materials : mechanisms and experiments. Acta Materialia, Volume 52, 2004, pp 3911-3920.

**Bomas H., Mayr P., Schleicher M. (1997)**

Calculation method for the fatigue limit of parts of case hardened steels. Materials Science and Engineering A234-236, 1997, pp 393-396.

**Brown M.W. (1986)**

Interfaces between short, long and non-propagating cracks. The behaviour of Short Fatigue Cracks (Edited by KJ Miller and ER de los Rios), 1986, pp 423-439.

**Chantier – De Lima I. (2000)**

Tolérance aux défauts initiaux et effets de surface : dimensionnement à la fatigue de pièces de fonderie. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2000.

**Cottrell A.H., Hull D. (1957)**

Proc. Roy. Soc., London, 1957, A242, pp211.



**Crossland B. (1956)**

Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London, 1956, pp 138-149.

**Cugy P., Galtier A. (2002)**

Microplasticity and temperature increase in low carbon steel. Proceedings of the 8th International Fatigue Congress, Stockholm (Sweden), 2002.

**Dang Van K. (1973)**

Sur la résistance à la fatigue des métaux. Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'Artillerie française, 3<sup>ème</sup> fascicule, 1973.

**Dantu P. (1957)**

A contribution to the mechanical and geometrical study of non-cohesive masses. Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Butterworths Scientific Publications, London, 1957.

**Delahay T. (2004)**

Développement d'une méthode probabiliste de calcul en fatigue multiaxiale prenant en compte la répartition volumique des contraintes. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2004.

**Diard O., Leclercq S., Rousselier G., Cailletaud G. (2005)**

Evaluation of finite element based analysis of 3D multicrystalline aggregates plasticity; Application to crystal plasticity model identification and the study of stress and strain fields near grain boundaries. International Journal of Plasticity, Volume 21, 2005, pp 691-722.

**Doudard C., Calloch S., Hild F., Cugy P., Galtier A. (2004)**

Identification of the scatter in high cycle fatigue from temperature measurements. CR Mécanique, Volume 332, 2004, pp 795-801.

**Doudard C. (2004)**

Détermination rapide des propriétés en fatigue à grand nombre de cycles à partir d'essais d'échauffement. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 2004.

**Doudard C., Poncelet M., Calloch S., Boue C., Hild F., Galtier A. (2007)**

Determination of an HCF criterion by thermal measurements under biaxial cyclic loading. International Journal of Fatigue, Volume 29 (4), 2007, pp 748-757.

**Fan J., McDowell D.L., Horstemeyer M.F., Gall K. (2003)**

Cyclic plasticity at pores and inclusions in cast Al-Si alloys. Engineering Fracture Mechanics, Volume 70 (10), 2003, pp 1281-1302.

**Fatemi A., Kurath P. (1988)**

Multiaxial fatigue life predictions under the influence of mean stresses. ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Volume 110, 1988, pp. 380-388.

**Flacelière L. (2001)**

Prise en compte de défauts matériaux sur l'endurance par un critère non local. Rapport de DEA, LMPM-ENSMA de Poitiers, d'après [Delahay,2004].

**Forest S., Cailletaud G., Jeulin D., Feyel F., Galliet I., Mounoury V., Quilici S. (2002)**

Introduction au calcul de microstructures. Mécaniques et Industries, Volume 3, 2002, pp 439-456.

**Forsyth P.J.E. (1957)**

Proc. Roy. Soc., London, 1957, A242, pp198-202.

**Gall K., Horstemeyer M., McDowell D.L., Fan J. (2001)**

On the driving force for fatigue crack formation from inclusions and voids in a cast A356 aluminum alloy. International Journal of Fracture, Volume 108, 2001, pp 207-233.

**Gerber Y. (1874)**

Calculation of the allowable stresses in iron structures. Z Bayer Archit Ing Ver 6

**Goodman J. (1899)**

Mechanics applied to engineering (1<sup>st</sup> ed.). Longmans, Green and Co.

**Gough H.J., Pollard H.V., Clenshaw W.J. (1951)**

Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stress. Reports and Memoranda N°2522, Aeronautical Research Council, His Majesty's Stationary Office, London.

**Guriev A.V., Bogdanov E.P. (1984)**

Effects of structural stresses on the strength of polycrystalline materials. Strength of materials, Volume 16 (1), 1984, pp 81-87.

**Hamam R., Pommier S., Bumbieler F. (2005)**

Mode I fatigue crack growth under biaxial loading. International Journal of Fatigue, Volume 27, 2005, pp 1342-1246.

**Hill R. (1967)**

The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 15, 1967, pp 79-95.

**Huntington (1958)**

The elastic constants of crystals. Solid State Physics, Volume 7, Academic Press, New York, 1958.

**Irwin G.R. (1957)**

Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate. Journal of Applied Mechanics, Volume 24, 1957, p361.

**Kim S.A., Johnson W.L. (2007)**

Elastic constants and internal friction of martensitic steel, ferritic-perlitic steel, and  $\alpha$ -iron. Materials Science and Engineering A, Volume 452-453, 2007, pp 633-639.

**Kitagawa H., Takahashi S. (1976)**

Applicability of fracture mechanics to very small cracks. Proceedings of the second International Conference on Mechanical Behaviour of Materials, 1976, pp 627-631.

**Laz P.J., Hillberry B.M. (1998)**

Fatigue life prediction from inclusion initiated cracks. *International Journal of Fatigue*, Volume 20, 1998, pp 263-270.

**Laz P.J., Craig B.A., Hillberry B.M. (2001)**

A probabilistic total fatigue life model incorporating material inhomogeneities, stress level and fracture mechanics. *International Journal of Fatigue*, Volume 23, 2001, pp 119-127.

**Le Biavant – Guerrier K. (2000)**

Etude de l'amorçage de fissures de fatigue dans le Ti-6Al-4V. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2000.

**Luo J., Bowen P. (2003)**

A probabilistic methodology for fatigue life prediction. *Acta Materialia*, Volume 51, 2003, pp 3537-3550.

**Mandel J. (1971)**

Plasticité classique et viscoplasticité. *Courses and Lectures of CISM*, n°97, Springer-Verlag Publishers, Wien, New-York, 1971.

**Marin J. (1956)**

Interpretation of fatigue strengths for combined stresses. *Proceedings of the International Conference on Fatigue of Metals*, London, 1956, Institution of Mechanical Engineers, pp. 184-194.

**McEvily A.J., Endo M. Ishihara S. (2005)**

The influence of biaxial stress on the fatigue behavior of defect-containing steels. *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Fracture*, Turin (Italy), 2005.

**Miller K.J., Brown M.W. (1973)**

A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions. *Proceedings of Instn. Mech. Engrs*, Volume 187, pp 745-755.

**Miller K.J. (1987)**

The behaviour of short fatigue cracks and their initiation, part I: a review of two recent books. *Fatigue and Fracture of Engineering Material and Structure*, Volume 10, 1987, pp 75-91.

**Miller K.J. (1987)**

The behaviour of short fatigue cracks and their initiation, part II: a general summary. *Fatigue and Fracture of Engineering Material and Structure*, Volume 10, 1987, pp 93-113.

**Morel F., Palin-Luc T. (2002)**

A non-local theory applied to high cycle multiaxial fatigue. *Fatigue and Fracture of Engineering Material and Structure*, Volume 25, 2002, pp 649-665.

**Morel F., Flacelière L. (2005)**

Data scatter in multiaxial fatigue: from the infinite to the finite fatigue life regime. *International Journal of Fatigue*, Volume 27, 2005, pp 1089-1101.

**Murakami Y., Endo M. (1986)**

Effects of hardness and crack geometries on  $\Delta K_{th}$  of small cracks emanating from small defects. The behaviour of Short Fatigue Cracks (Edited by KJ Miller and ER de los Rios), Mechanical Engineering Publications, London, pp 275-293.

**Murakami Y. (1987)**

Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, Elmsford, New York, USA

**Murakami Y., Nomoto T., Ueda T., Murakami Y. (2000a)**

On the mechanism of fatigue failure in the superlong life regime ( $N > 10^7$  cycles). Part I : Influence of hydrogen trapped by inclusions. Fatigue and Fracture of Engineering Material and Structure, Volume 23 (11), 2000, pp 893-902.

**Murakami Y., Nomoto T., Ueda T., Murakami Y. (2000b)**

On the mechanism of fatigue failure in the superlong life regime ( $N > 10^7$  cycles). Part II : A fractographic investigation. Fatigue and Fracture of Engineering Material and Structure, Volume 23 (11), 2000, pp 903-910.

**Murakami Y., Matsunaga H. (2006)**

The effect of hydrogen on fatigue properties of steels used for fuel cell system. International Journal of Fatigue, Volume 28, 2006, pp 1509-1520.

**Nadot Y., Billaudeau T. (2006)**

Multiaxial fatigue limit criterion for defective materials. Engineering Fracture Mechanics, Volume 73, 2006, pp 112-133.

**Newman Jr J.C., Raju S.R. (1981)**

An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. Engineering Fracture Mechanics, Volume 15, 1981, pp 185-192.

**Papadopoulos Y.V. (1993)**

Fatigue limit of metals under multiaxial stress conditions : the microscopic approach. Technical Note N°I.93;101, Commission of the European Communities, Joint Research Centre, ISEI/IE 2495/93.

**Pommier S. (1995)**

Amorçage et propagation de fissures courtes en fond d'entaille, étude du superalliage N18 en fatigue fluage. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1995.

**Pommier S. (2001)**

Contribution à l'étude de la fatigue des matériaux métalliques. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Ecole Centrale de Paris, 2001.

**Pommier S. (2002)**

'Arching' effect in elastic polycrystals: implications for the variability of fatigue lives. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Volume 25, 2002, pp 331-348.

**Pommier S. (2007)**

Cyclic plasticity of a cracked structure submitted to mixed mode loading. Key Engineering Materials, Volume 348-349, 2007, pp 105-108.

**Poncelet M., Doudard C., Calloch S., Hild F., Weber B., Galtier A. (2007)**

Prediction of self-heating measurements under proportional and non-proportional multiaxial cyclic loadings. *Comptes Rendus Mécanique*, Volume 335 (2), 2007, pp 81-86.

**Radjai F. (1999)**

Multicontact dynamics of granular systems. *Computer Physics Communications*, Volume 121-122, 1999, pp 294-298.

**Sauzay M. (2006)**

Effet de l'anisotropie élastique cristalline sur la distribution des facteurs de Schmid à la surface des polycristaux. *C.R. Mécanique*, Volume 334, 2006, pp 353-361.

**Sines G. (1959)**

Behaviour of metals under complex static and alternating stresses. *Metal fatigue*, McGraw-Hill, New York, 1959, pp 145-169.

**Smith K.N., Watson P., Topper T.H. (1970)**

A stress-strain function for the fatigue of metals. *Journal of Materials*, Volume 5 (4), 1970, pp. 767-778.

**Socie D. (1993)**

Critical Plane Approaches for Multiaxial Fatigue Damage Assessment. *Advances in Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 1191, D. L. Mc-Dowell and R. Ellis, eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA, pp. 7-36.

**Söderberg C. (1930)**

Factor of safety and working stress. *American Society for Testing and Materials*, Volume 52, 1930, pp 13-28.

**Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. (1985)**

The stress analysis of cracks handbook. 2<sup>nd</sup> edition. Missouri, USA : Paris Production Inc. St. Louis.

**Van Hecke M. (2005)**

Granular matter: a tale of tails. *Nature*, Volume 435, 2005, pp 1041-1042.

**Wang X. (2003)**

Elastic T-stress solutions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 70, 2003, pp 731-756.

**Wang X. (2004)**

Elastic T-stress solutions for penny-shaped cracks under tension and bending. *Engineering Fracture Mechanics*, Volume 71, 2004, pp 2283-2298.

**Weibull W. (1951)**

A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 18, 1951, pp 293-297.

Une des sources principales d'aléa en fatigue est la présence de défauts dans le matériau. Pour établir les spécifications sur la propreté inclusionnaire d'un matériau, il faut pouvoir lier la probabilité de présence des défauts par taille et le risque de rupture par fatigue des composants. Les travaux de Kitagawa et Takahashi permettent de distinguer deux domaines en termes de dimensions de défauts vis à vis du risque de rupture par fatigue : celui des petits défauts, dans lequel la limite d'endurance est indépendante de la dimension des défauts et celui des grands défauts où la dimension des défauts est généralement prise en compte dans le cadre de la MLER.

Lorsque les distributions de défauts couvrent les deux domaines, il faut disposer d'un modèle probabiliste continu en termes de dimensions de défauts. Pour cela nous avons développé un critère de fatigue « unifié » en termes de dimension de défauts. Il s'agit d'un critère de non-propagation (les défauts sont supposés pré-exister dans la structure) construit à partir d'une énergie élastique de cisaillement critique en pointe de fissure. Cette énergie est calculée à l'aide des champs asymptotiques de la MLER étendus à l'ordre supérieur (contrainte T), pour être applicable aux défauts de petites dimensions. Le critère est continu en termes de dimension de défaut et faiblement dépendant de leur taille lorsqu'elle diminue. Représenter le défaut par une fissure, classe le critère proposé dans la catégorie des critères à plan critique. Et, à travers la contrainte T, le critère est sensible au caractère multiaxial du chargement et répond comme le critère de Dang Van pour les très petits défauts.

Le caractère probabiliste du risque de rupture par fatigue est alors introduit naturellement dans ce critère via les distributions de dimensions de défauts, en appliquant l'hypothèse du maillon faible. Mais l'aléa lié à l'interaction entre les défauts et la microstructure intervient également. La dernière partie de notre étude s'est donc centrée sur l'analyse de la fluctuation des contraintes d'origine microstructurale et son influence sur la distribution des contraintes seuils de non-propagation des défauts. Cette fluctuation induit une dispersion notable du seuil de non-propagation pour des micro-fissures dont la dimension est proche d'une dizaine de grains, puis l'effet disparaît progressivement avec l'augmentation de la dimension du défaut.

Mots-Clefs : Rupture, Fatigue, approche probabiliste, multiaxial, défauts.

One of the main sources of randomness in fatigue is the presence of defects in the material. So as to establish specifications about the material cleanliness, i.e. the distribution of inclusion sizes, the relation between the defect size and the risk of failure should be established. The pioneering results of Kitagawa and Takahashi have established that two domains can be distinguished: when defects are small, the endurance limit does not vary with the defect size. Endurance models are therefore expressed within the framework of continuum mechanics. On the contrary, the size of large defects should be accounted for, which is usually done within the framework of linear elastic fracture mechanics.

When the distributions of defects are wide, an accurate prediction of the failure probability requires a unified fatigue criterion in terms of defects sizes. Therefore, a non-propagation criterion was developed. It is based on a critical elastic distortional energy around the crack tip and includes higher order terms (T-stress) of LEFM asymptotic fields, so as to be applicable to smaller defects. This criterion responds like the Dang Van criterion for small defects and like a non-propagation threshold stress intensity factor for large defects.

The probability of failure is then determined using the weakest link theory from the statistic distribution of defects sizes. However, when defects are small, their non-propagation threshold becomes sensitive to the local environment of the defect. Therefore, the last part of this thesis concerns the fluctuation of stresses within the microstructure and its effects on the non-propagation threshold of defects. This "microstructural" fluctuation induces a dispersion of the non-propagation threshold, when defects have a dimension below ten grains and then vanishes progressively with the inverse of the squareroot of the defect size, when this defect size increases.

Keywords: fracture, fatigue, probabilistic approach, multiaxial, defects.

